TÓM TẮT KIẾN THỨC TOÁN CẤP III

ÔN THI THPT QUỐC GIA

Tự luận và Trắc nghiệm

Thượng Thiện Nhược Thủy

Lão Tử

I. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Hệ thức Cơ bản:

▪ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	▪ $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	▪ $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	▪ $\tan\alpha.\cot\alpha=1$
▪ $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	▪ $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	▪ $\begin{cases}\forall k\in\mathbb{Z}\\ \sin(\alpha+k2\pi)=\sin\alpha\\ \cos(\alpha+k2\pi)=\cos\alpha\end{cases}$	▪ $\begin{cases}\forall k\in\mathbb{Z}\\ \tan(\alpha+k\pi)=\tan\alpha\\ \cot(\alpha+k\pi)=\cot\alpha\end{cases}$

2. Cung Liên kết:

Đối: $\alpha;-\alpha$	**Bù: $\alpha;\pi-\alpha$**	**Phụ: $\alpha;\dfrac{\pi}{2}-\alpha$**	**Khác pi: $\alpha;\pi+\alpha$**	**Khác $\dfrac{Pi}{2}$: $\alpha;\dfrac{\pi}{2}+\alpha$**
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$	$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$	$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$
Cos đối	***Sin bù***	***Phụ chéo***	***Khác Pi: tang, cotang***	***Khác pi/2: sin bạn cos, cos thù sin***

3. Công thức Cộng:

$* \sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$ $* \sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b$	$* \cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$ $* \cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$
$\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$	$\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$

4. Công thức Nhân đôi, Nhân ba:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$	$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$	$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$	$\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

5. Công thức Hạ bậc:

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$	$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$	$\tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

6. Biến đổi Tổng thành Tích:

$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}.\sin\dfrac{a-b}{2}$
$\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$	$\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}.\sin\dfrac{a-b}{2}$
$\tan a + \tan b = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$	$\tan a - \tan b = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$
$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}.\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$	$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$

7. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$	$\sin a.\sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$	$\sin a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

▪ $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$	▪ $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$
Nếu $\sin u = m \in [-1;1]$ và $m \notin \left\{\pm 1; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \pm\dfrac{1}{2}; 0\right\}$ thì: $\boxed{\sin u = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \arcsin m + k2\pi \\ u = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array}\right.} \quad (k\in\mathbb{Z})$	Nếu $\cos u = m \in [-1;1]$ và $m \notin \left\{\pm 1; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \pm\dfrac{1}{2}; 0\right\}$ thì: $\boxed{\cos u = m \Leftrightarrow u = \pm\arccos m + k2\pi} \quad (k\in\mathbb{Z})$
Nếu $\sin u = m \notin [-1;1]$ thì: $\boxed{\sin u = m \Leftrightarrow u \in \varnothing}$	Nếu $\cos u = m \notin [-1;1]$ thì: $\boxed{\cos u = m \Leftrightarrow u \in \varnothing}$
Đặc biệt: $\left\langle\begin{array}{l} \sin u = 1 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi \end{array}\right.$	Đặc biệt: $\left\langle\begin{array}{l} \cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi \\ \cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \cos u = 0 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.$
▪ $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$	▪ $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$
Nếu $\tan u = m \notin \left\{\pm\sqrt{3}; \pm 1; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}; 0\right\}$ thì:	Nếu $\cot u = m \notin \left\{\pm\sqrt{3}; \pm 1; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}; 0\right\}$ thì:

$\boxed{\tan u = m \Leftrightarrow u = \arctan m + k\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$	$\boxed{\cot u = m \Leftrightarrow u = arc\cot m + k\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$
Lưu ý: Điều kiện để hàm $\tan u$ có nghĩa là $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Tuy vậy, phương trình $\boxed{\tan u = m}$ luôn có nghiệm, vì vậy không cần đặt điều kiện.	**Lưu ý:** Điều kiện để hàm $\cot u$ có nghĩa là $u \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Tuy vậy, phương trình $\boxed{\cot u = m}$ luôn có nghiệm, vì vậy không cần đặt điều kiện cho nó.

Kỹ thuật 1: Làm mất dấu TRỪ

∘ $-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$ ∘ $-\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$ ∘ $-\tan\alpha = \tan(-\alpha)$ ∘ $-\cot\alpha = \cot(-\alpha)$	**Ví dụ:** $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin x \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin(-x)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = -x + k2\pi \\ \not{x} - \frac{\pi}{4} = \pi + \not{x} + k2\pi \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

Kỹ thuật 2: Biến đổi CHÉO

∘ $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ∘ $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ∘ $\tan\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ∘ $\cot\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$	**Ví dụ:** $\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ (với $a^2 + b^2 \geq c^2$)	**Phương trình $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$**
$a\sin x + b\cos x = c$ $\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\Leftrightarrow \sin x.\cos\alpha + \cos x.\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (với $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$) $\Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \sin\beta \Leftrightarrow$ .... với $\sin\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$	▪ **Trường hợp 1:** Xét $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1$. Ta có hệ sau: $\begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ a\sin^2 x = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ a = d \end{cases} \Leftrightarrow$ ....(1) ▪ **Trường hợp 2:** Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$, ta có: $a\tan^2 x + b\tan x + c = d(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow$ ....(2) ▪ Hợp nghiệm của (1), (2) ta có tập nghiệm của phương trình đã cho.

Lưu ý: Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ chỉ có nghiệm khi và chỉ khi $\boxed{a^2 + b^2 \geq c^2}$.

III. TỔ HỢP – XÁC SUẤT

QUY TẮC CỘNG	QUY TẮC NHÂN
Nếu phép đếm được chia ra **nhiều trường hợp**, ta sẽ **cộng các kết quả** lại.	Nếu phép đếm được chia ra làm **nhiều giai đoạn bắt buộc**, ta sẽ **nhân các kết quả** của mỗi giai đoạn ấy.

HOÁN VỊ	TỔ HỢP	CHỈNH HỢP
▪ Sắp xếp (đổi chỗ) của n phần tử khác nhau, ta có số cách xếp là $\boxed{P_n = n!}$ với $n \in \mathbb{N}$. ▪ $n! = 1.2.....(n-1)n$. ▪ Quy ước sốc: $0! = 1$.	▪ Chọn k phần tử từ n phần tử (không sắp xếp thứ tự), ta có số cách chọn là $\boxed{C_n^k}$. ▪ $\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}}$ với $\begin{cases} k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^* \\ 0 \le k \le n \end{cases}$.	▪ Chọn k phần tử từ n phần tử (có sắp xếp thứ tự), ta được số cách chọn là $\boxed{A_n^k}$. ▪ $\boxed{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$ với $\begin{cases} k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^* \\ 0 \le k \le n \end{cases}$.

✍Một số tính chất:	$C_n^k = C_n^{n-k}$	$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$	$A_n^k = k!C_n^k$

XÁC SUẤT		
	▪ **Công thức:** $\boxed{P(X) = \dfrac{n(X)}{n(\Omega)}}$ Trong đó: $n(X)$: số phần tử của tập biến cố X; $n(\Omega)$: số phần tử không gian mẫu; $P(X)$ là xác suất để biến cố X xảy ra với $X \subset \Omega$.	▪ **Tính chất:** $\boxed{0 \le P(X) \le 1}$. $\boxed{P(\varnothing) = 0;\ P(\Omega) = 1}$. $\boxed{P(X) = 1 - P(\overline{X})}$ với $\overline{X}$ là biến cố đối của X.
	▪ Nếu *A*, *B* là hai biến cố **xung khắc** với nhau thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	▪ Nếu *A* và *B* là hai biến cố **độc lập** với nhau thì $P(A.B) = P(A).P(B)$.

IV. KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTƠN

Khai triển dạng liệt kê: *(với $n \in \mathbb{N}^*$)*	▪ $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$. ▪ **Đặc biệt:** $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$ (*). ▪ **Hệ quả 1:** $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ (tức là thay $x = 1$ vào (*)). ▪ **Hệ quả 2:** Với n chẵn, chỉ cần thay $x = -1$ vào (*), ta có: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - .... - C_n^{n-1} + C_n^n = 0 \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 ...... + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + ... C_n^{n-1}$
Khai triển tổng quát: *(với $n \in \mathbb{N}^*$)*	▪ Khai triển: $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k}$. Số hạng tổng quát: $\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k}$ ▪ Phân biệt hệ số và số hạng: $\underbrace{\underbrace{C_n^k (-1)^k a^{n-k} b^k}_{\text{HỆ SỐ}} . x^\alpha}_{\text{SỐ HẠNG}}$. **Số hạng không chứa** x ứng với $\alpha = 0$.

V. CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

CẤP SỐ CỘNG	CẤP SỐ NHÂN
1. Định nghĩa: ▪ Dãy số (u_n) được gọi là **cấp số cộng** khi và chỉ khi $\boxed{u_{n+1} = u_n + d}$ với $n \in \mathbb{N}^*$, d là hằng số. ▪ **Cấp số cộng** như trên có **số hạng đầu** u_1, **công sai** d. **2. Số hạng tổng quát:** ▪ $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d}$ *với* $n \in \mathbb{N}^*$. **3. Tính chất các số hạng:**	**1. Định nghĩa:** ▪ Dãy số (u_n) được gọi là **cấp số nhân** khi và chỉ khi $\boxed{u_{n+1} = u_n.q}$ với $n \in \mathbb{N}^*$, q là hằng số. ▪ **Cấp số nhân** như trên có **số hạng đầu** u_1, **công bội** q. **2. Số hạng tổng quát:** ▪ $\boxed{u_n = u_1.q^{n-1}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. **3. Tính chất các số hạng:** ▪ $\boxed{u_{k-1}.u_{k+1} = u_k^2}$ với $k \in \mathbb{N}$ *và* $k \ge 2$. **4. Tổng *n* số hạng đầu tiên:**

- $\boxed{u_{k-1}+u_{k+1}=2u_k}$ *với* $k\in\mathbb{N}^*$ *và* $k\geq 2$.

4. Tổng *n* số hạng đầu tiên:

- $\boxed{S_n=u_1+u_2+...+u_n=\dfrac{(u_1+u_n)n}{2}}$.

- $\boxed{S_n=u_1+u_2+...+u_n=\dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}}$ với $q\neq 1$.

VI. GIỚI HẠN DÃY SỐ - HÀM SỐ

1. Giới hạn dãy số

1.1. Dãy số có giới hạn 0:

- $\lim\dfrac{1}{n}=0$
- $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$
- $\lim\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$
- $\lim\dfrac{1}{n^\alpha}=0$
- $\lim q^n=0$ với $|q|<1$.

1.2. Dãy số có giới hạn hữu hạn:

Cho $\lim u_n=a$. Ta có:	
$\lim\lvert u_n\rvert=\lvert a\rvert$ và $\lim\sqrt[3]{u}=\sqrt[3]{a}$	$\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$ với $a\geq 0$.
Cho $\lim u_n=a$, $\lim v_n=b$. Ta có:	
$\lim(u_n\pm v_n)=a\pm b$	$\lim(u_n.v_n)=a.b$
$\lim\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{a}{b}$ với $b\neq 0$	$\lim(k.u_n)=k.a$

1.3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $\boxed{S=u_1+u_1q+u_1q^2+...=\dfrac{u_1}{1-q}}$.

1.4. Dãy số có giới hạn vô cùng:

Quy tắc 1: Cho $\lim u_n=\pm\infty$, $\lim v_n=\pm\infty$. Tính $\lim(u_nv_n)$.		
$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_nv_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Quy tắc 2: Cho $\lim u_n=\pm\infty$, $\lim v_n=a\neq 0$. Tính $\lim(u_nv_n)$.		
$\lim u_n$	Dấu của a	$\lim(u_nv_n)$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	–	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	–	$+\infty$
Quy tắc 3: Cho $\lim u_n=a\neq 0$, $\lim v_n=0$. Tính $\lim\dfrac{u_n}{v_n}$.		
Dấu của a (tử)	Dấu của v_n (mẫu)	$\lim\dfrac{u_n}{v_n}$
+	+	$+\infty$
+	–	$-\infty$
–	+	$-\infty$
–	–	$+\infty$

2. Giới hạn hàm số:	**2.1. Giới hạn tại vô cực:**

Cho k dương, ta có:

▪ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$	▪ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^k=+\infty$	▪ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=\begin{cases}+\infty,\ k\ chẵn\\-\infty,\ k\ lẻ\end{cases}$

2.2. Giới hạn hữu hạn:

Cho $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a,\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$. Ta có:

▪ $\lim\limits_{x\to x_0}\left\|f(x)\right\|=\left\|a\right\|$	▪ $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{a}$	▪ $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}$ với $a\ge0$
▪ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=a\pm b$	▪ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=a.b$	
▪ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[k.f(x)\right]=k.a$ với k là hằng số	▪ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$ với b khác 0	

2.3. Quy tắc tìm giới hạn vô cực:

Quy tắc 1: Cho $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a\ne0$. Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$	Dấu của a	$\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]$.
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 2: Cho $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\ne0,\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$. Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Dấu của a	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

2.4. Bổ trợ các công thức để khử dạng vô định:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ với $x_1,\ x_2$ là nghiệm của tam thức bậc hai.	$\left\|\begin{array}{l}x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)\\a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1})\end{array}\right.$
$a+\sqrt{b}=\dfrac{a^2-b}{a-\sqrt{b}}$	$a-\sqrt{b}=\dfrac{a^2-b}{a+\sqrt{b}}$
$a+\sqrt[3]{b}=\dfrac{a^3+b}{a^2-a\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$	$a-\sqrt[3]{b}=\dfrac{a^3-b}{a^2+a\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$

3. Điều kiện giới hạn và điều kiện liên tục:

3.1. Điều kiện tồn tại giới hạn:

	Giới hạn bên phải	Giới hạn bên trái	**Điều kiện để hàm số có giới hạn tại x_0.**
Ký hiệu	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$
Nghĩa là	$\begin{cases} x \longrightarrow x_0 \\ x > x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} x \longrightarrow x_0 \\ x < x_0 \end{cases}$	Khi đó: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

3.2. Điều kiện liên tục của hàm số:

- Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \Leftrightarrow f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
- Mọi hàm số đa thức, phân thức hữu tỉ, hàm lượng giác đều liên tục trên tập xác định của chúng.
- Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục với mọi $x=x_0\in(a;b)$.
- Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ liên tục trên } (a;b) \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a);\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b) \end{cases}$.

3.3. Điều kiện có nghiệm của phương trình:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên $(a;b)$.

VII. ĐẠO HÀM

1. **Định nghĩa đạo hàm tại một điểm:** $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

2. **Bảng đạo hàm cơ bản và mở rộng:**

$k'=0$ (với k là hằng số)	$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ $\xrightarrow{MR} (u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}.\boxed{u'}$	$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\xrightarrow{MR} \left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{\boxed{u'}}{2\sqrt{u}}$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$ $\xrightarrow{MR} \left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{\boxed{u'}}{u^2}$
$\left(e^x\right)'=e^x$ $\xrightarrow{MR} \left(e^u\right)'=e^u.\boxed{u'}$	$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$ $\xrightarrow{MR} \left(a^u\right)'=a^u.\ln a.\boxed{u'}$	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ $\xrightarrow{MR} (\ln u)'=\dfrac{\boxed{u'}}{u}$	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ $\xrightarrow{MR} (\log_a u)'=\dfrac{\boxed{u'}}{u\ln a}$
$(\sin x)'=\cos x \xrightarrow{MR} (\sin u)'=\boxed{u'}\cos u$		$(\cos x)'=-\sin x \xrightarrow{MR} (\cos u)'=-\boxed{u'}\sin u$	
$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ $\xrightarrow{MR} (\tan u)'=\dfrac{\boxed{u'}}{\cos^2 u}=\boxed{u'}\left(1+\tan^2 u\right)$		$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\left(1+\cot^2 x\right)$ $\xrightarrow{MR} (\cot u)'=-\dfrac{\boxed{u'}}{\sin^2 u}=-\boxed{u'}\left(1+\cot^2 u\right)$	

3. **Quy tắc tìm đạo hàm:**

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(k.u)' = k.u'$
- $(u.v)' = u'v + uv'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
- $f'_x = f'_u.u'_x$ với $\begin{cases} f'_x \text{ là đạo hàm của } f \text{ theo biến } x \\ f'_u \text{ là đạo hàm của } f \text{ theo biến } u \\ u'_x \text{ là đạo hàm của } u \text{ theo biến } x \end{cases}$.

4. **Đạo hàm cấp cao và vi phân:**

Đạo hàm cấp cao	Vi phân
$f''(x) = [f'(x)]'$; $f'''(x) = [f''(x)]'$ $f^{(4)}(x) = [f'''(x)]'$;...; $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$	$df(x) = f'(x).dx$ $dy = y'.dx$ $du = u'.dx$

VIII.KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU	HÀM BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$	HÀM NHẤT BIẾN $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \ (ad - bc \neq 0,\ c \neq 0)$
▪ **Bước 1:** Tìm tập xác định D . ▪ **Bước 2:** Tính $y' = f'(x)$; cho $y' = 0$ $\xrightarrow{\text{Tìm nghiệm}} x_1, x_2...$ Tìm thêm các giá trị x mà y' không xác định. ▪ **Bước 3:** Lập bảng biến thiên. *(Nên chọn giá trị x đại diện cho từng khoảng thay vào y' để tìm dấu của y' trên khoảng đó).* ▪ **Bước 4:** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận về sự đồng biến, nghịch biến của hàm số.	▪ Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. ▪ Hàm số **đồng biến trên tập xác định** $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. ▪ Hàm số **nghịch biến trên tập xác định** $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. ✍ **Lưu ý:** Nếu a chứa tham số m thì ta xét $a = 0$, tìm m. Thay m tìm được để kiểm tra dấu y', xem y có **đơn điệu** trên $\mathbb{R}$ không?	▪ Đạo hàm $y' = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$. ▪ Hàm số **đồng biến trên từng khoảng xác định** $\Leftrightarrow ad - bc > 0$. ▪ Hàm số **nghịch biến trên từng khoảng xác định** $\Leftrightarrow ad - bc < 0$. ✍ **Lưu ý:** Nếu đề cho **đồng biến (nghịch biến)** trên $(\alpha;\beta)$ thì ta xét điều kiện: $-\dfrac{d}{c} \notin (\alpha;\beta)$.

ĐIỀU KIỆN CỰC TRỊ	CỰC TRỊ HÀM BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$	CỰC TRỊ HÀM BẬC BỐN $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$
▪ Hàm số có điểm cực trị là $(x_0; y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$. (giả thiết là hàm số liên tục tại x_0). ▪ Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm số $f(x)$ **đạt cực đại** tại $x = x_0$.	▪ Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. ▪ Hàm số có hai cực trị (tức là có CĐ-CT) $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{y'} > 0 \end{cases}$ (*) . ▪ Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow x_1x_2 < 0 \Leftrightarrow ac < 0$. ▪ Hàm số có hai điểm cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0,\ \Delta_{y'} > 0 \\ ac > 0 \end{cases}$.	▪ Đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx$. ▪ Điều kiện cực trị **Ba cực trị**: $ab < 0$ **Một cực trị**: $\begin{cases} ab \geq 0 \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$ **Có cực trị**: $a^2 + b^2 > 0$ ▪ Cho A, B, C là ba điểm cực trị, ta có: $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$

Biên soạn: Hoàng Xuân Nhàn______________Email góp ý: thayxuannhan@gmail.com

Nếu $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}$ thì hàm số $f(x)$ **đạt cực tiểu** tại $x=x_0$.	Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị: $y=f(x)-\dfrac{f'(x).f''(x)}{18a}$. ☞**Lưu ý:** Nếu tọa độ hai cực trị đã rõ ràng ta nên gọi đường thẳng $y=ax+b$ rồi thay tọa độ hai điểm đó vào $\longrightarrow$ Giải hệ tìm *a*, *b*.	$S_{\Delta ABC}=\sqrt{\dfrac{b^5}{-32a^3}}$.

TÌM MAX-MIN TRÊN ĐOẠN Tìm Max-Min của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$	**TÌM MAX-MIN TRÊN KHOẢNG** Tìm Max-Min của $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$
▪ **Bước 1:** Tính $y'=f'(x)$. Tìm các nghiệm $x_i\in(a;b)$ khi cho $f'(x)=0$. Tìm $x_j\in(a;b)$ mà y' không xác định. ▪ **Bước 2:** Tính các giá trị $f(a)$, $f(b)$ và $f(x_i)$, $f(x_j)$ (nếu có). ▪ **Bước 3:** So sánh tất cả giá trị trong **bước 2** để **kết luận về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.**	▪ **Bước 1:** Tính $y'=f'(x)$. Tìm các nghiệm $x_i\in(a;b)$ khi cho $f'(x)=0$. Tìm $x_j\in(a;b)$ mà y' không xác định. ▪ **Bước 2:** Cần tính $\lim\limits_{x\to a^+} y$, $\lim\limits_{x\to b^-} y$. (Nếu thay $(a;b)$ bằng $(-\infty;+\infty)$ thì ta tính thêm $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$). ▪ **Bước 3:** Lập bảng biến thiên và suy ra **giá trị lớn nhất, nhỏ nhất** trên khoảng.

ĐẶC BIỆT	▪ Nếu hàm $f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases} \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)=f(b) \\ \min\limits_{x\in[a;b]} f(x)=f(a) \end{cases}$ Max; y = f(x); a; b; Ox; Min	▪ Nếu hàm $f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases} \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)=f(a) \\ \min\limits_{x\in[a;b]} f(x)=f(b) \end{cases}$ Max; y = f(x); a; b; Ox; Min

TIỆM CẬN ĐỨNG	**TIỆM CẬN NGANG**
▪ **Định nghĩa:** $\begin{cases} x\longrightarrow x_0 \\ y\longrightarrow\pm\infty \end{cases}$ (*x* hữu hạn, *y* vô hạn), ta có **tiệm cận đứng** $x=x_0$. **Lưu ý:** điều kiện $x\longrightarrow x_0$ có thể được thay bằng $x\longrightarrow x_0^-$ (giới hạn bên trái) hoặc $x\longrightarrow x_0^+$ (giới hạn bên phải). ▪ **Cách tìm TCĐ:** Nếu $x=x_0$ là một **nghiệm của mẫu số** mà **không phải là nghiệm của tử số** thì $x=x_0$ chính là một **TCĐ** của đồ thị. (*với tập xác định có dạng* $D=K\setminus\{x_0;\ x_1;...\}$).	▪ **Định nghĩa:** $\begin{cases} x\longrightarrow\pm\infty \\ y\longrightarrow y_0 \end{cases}$ (*x* vô hạn, *y* hữu hạn), ta có **tiệm cận ngang** $y=y_0$. ▪ **Cách tìm TCN:** Đơn giản nhất là dùng CASIO **Bước 1:** Nhập hàm số vào máy. **Bước 2:** CALC $\xrightarrow{NEXT}$ $X=10\wedge10$ $\xrightarrow{NEXT}$ = CALC $\xrightarrow{NEXT}$ $X=-10\wedge10$ $\xrightarrow{NEXT}$ = **Bước 3:** Nếu kết quả thu được là **hữu hạn** (tức là y_0) thì ta kết luận **TCN**: $y=y_0$.

▪ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(c\neq0,\ ad-bc\neq0)$ có một TCĐ: $x=-\dfrac{d}{c}$, một TCN: $y=\dfrac{a}{c}$.

☞ **Nên nhớ, mỗi đồ thị chỉ có tối đa là 2 tiệm cận ngang.**

SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ

Xét hai đồ thị $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$.

Phương pháp chung tìm giao điểm hai đồ thị

- **Bước 1 :** Lập phương trình hoành độ giao điểm của $(C_1)\&(C_2)$: $\boxed{f(x) = g(x)}$. (*)
- **Bước 2 :** Giải phương trình (*) để tìm các nghiệm $x_1,\ x_2,...$ (nếu có), suy ra $y_1,\ y_2...$

- Điều kiện để (C_1) và (C_2) có n điểm chung là phương trình (*) có n nghiệm khác nhau.
- Điều kiện để (C_1) tiếp xúc (C_2) là phương trình (*) có nghiệm kép hoặc hệ sau có nghiệm : $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$.

Tìm tham số để $\begin{cases} (C): y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ d: y = \alpha x + \beta \end{cases}$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt

- **Bước 1 :** Viết phương trình hoành độ giao điểm : $\dfrac{ax+b}{cx+d} = \alpha x + \beta$, đưa phương trình về dạng $g(x) = Ax^2 + Bx + C = 0$ $\left(x \neq -\dfrac{d}{c}\right)$.
- **Bước 2 :** Giải hệ $\begin{cases} A \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \\ g\left(-\dfrac{d}{c}\right) \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Tìm}} m?$

Tìm tham số để $\begin{cases} (C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ d: y = \alpha x + \beta \end{cases}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt

(Ta chỉ áp dụng cho trường hợp phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm đẹp)

- **Bước 1 :** Viết phương trình hoành độ giao điểm : $ax^3 + bx^2 + cx + d = \alpha x + \beta$, đưa phương trình về dạng
  $(x - x_0)\Big(\underbrace{Ax^2 + Bx + C}_{g(x)}\Big) = 0$.
  (có vận dụng kỹ năng chia Hoocner)
- **Bước 2 :** Giải hệ điều kiện : $\begin{cases} A \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Tìm}} m?$

Lưu ý : Để tìm nghiệm đẹp $x = x_0$, ta nhập vào máy chức năng giải phương trình bậc ba với $m = 100$.

PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

DẠNG 1	DẠNG 2	DẠNG 3
Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$	Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến có hệ số góc k.	Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến đi qua $A(x_A; y_A)$.
▪ **Bước 1:** Tính đạo hàm y', từ đó có hệ số góc $k = y'(x_0)$. ▪ **Bước 2 :** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị dạng $\boxed{y = k(x - x_0) + y_0}$.	▪ **Bước 1:** Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm và tính đạo hàm y'. ▪ **Bước 2:** Cho $y'(x_0) = k$, tìm được tiếp điểm $(x_0; y_0)$. ▪ **Bước 3:** Phương trình tiếp tuyến : $\boxed{y = k(x - x_0) + y_0}$.	▪ **Bước 1:** Tiếp tuyến có dạng : $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ (*) với $y_0 = f(x_0)$. ▪ **Bước 2:** Thay tọa độ điểm A vào (*) để tìm được x_0. ▪ **Bước 3:** Thay x_0 vào (*) để viết phương trình tiếp tuyến.

☞ **Đặc biệt :** *Nếu tiếp tuyến **song song** đường thẳng $y = ax + b$ thì nó có hệ số góc $k = a$, nếu tiếp tuyến **vuông góc** đường*

Biên soạn: Hoàng Xuân Nhàn______________Email góp ý: thayxuannhan@gmail.com

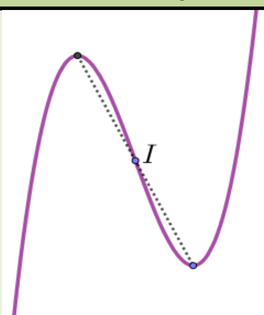
thẳng $y = ax + b$ thì nó có hệ số góc $k = -\frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$; *nếu tiếp tuyến tạo với* Ox *góc* α *thì nó có hệ số góc* $k = \pm\tan\alpha$.

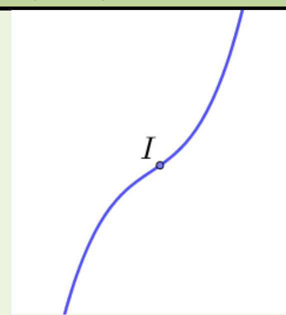
ĐIỂM ĐẶC BIỆT THUỘC ĐỒ THỊ

Tâm đối xứng (hay điểm uốn) của đồ thị bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

- **Bước 1:** Tính $\begin{cases} y' = 3ax^2 + 2bx + c \\ y'' = 6ax + 2b \end{cases}$.
- **Bước 2:** Cho $y'' = 0 \xrightarrow{\text{Tìm nghiệm}} x_0 = -\frac{b}{3a} \Rightarrow y_0$. Ta có tâm đối xứng (tức điểm uốn): $I(x_0; y_0)$.

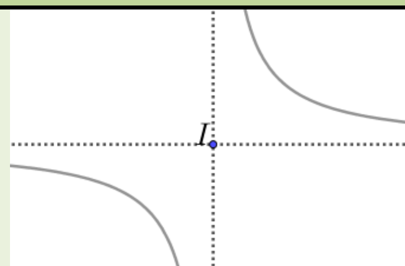
☞ **Cần nhớ:** Tâm đối xứng của đồ thị bậc ba cũng là trung điểm của hai điểm cực trị (nếu có).





Tâm đối xứng của đồ thị hàm nhất biến $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ $(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$

- Tìm tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$, suy ra được tâm đối xứng của đồ thị là: $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ (là giao điểm 2 tiệm cận tìm được).



Điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm nhất biến $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ $(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$

Cách 1: Tự luận

- **Bước 1:** Chia đa thức cho đa thức, ta viết lại hàm số $y = \alpha + \frac{\beta}{cx + d}$.
- **Bước 2:** Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ $cx + d$ là ước số nguyên của $\beta \xrightarrow{\text{Tìm được}} \left[\begin{array}{l} x = \\ x = \\ .... \end{array}\right.$, suy ra các giá trị y tương ứng. Từ đây tìm được các điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị.

Cách 2: Trắc nghiệm

Thực hiện trên máy tính bỏ túi như sau:

$\boxed{MODE} \longrightarrow \boxed{7} \longrightarrow \boxed{F(X) = \frac{aX + b}{cX + d}} \longrightarrow \boxed{START: -19}$ $\longrightarrow \boxed{END: -1} \longrightarrow \boxed{STEP: 1}$. Ta dò tìm những hàng có $F(X)$ nguyên thì nhận làm điểm cần tìm. Làm tương tự khi cho $\boxed{START: 0} \longrightarrow \boxed{END: 18} \longrightarrow \boxed{STEP: 1}$, ta sẽ bổ sung thêm các điểm nguyên còn lại. **Lưu ý**: Học sinh muốn đạt được tính chính xác cao hơn thì có thể dò trên nhiều khoảng, mỗi khoảng có $START$ và END cách nhau 19 đơn vị. (*Máy tính đời mới sẽ có bộ nhớ lớn hơn*).

NHẬN DIỆN ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

$$\longrightarrow y' = \underset{A}{3a}\, x^2 + \underset{B}{2b}\, x + \underset{C}{c}$$

Hệ số	Dấu hiệu đồ thị	Kết luận
a	Nhánh phải đồ thị đi lên	$a > 0$
	Nhánh phải đồ thị đi xuống	$a < 0$
d	Giao điểm với Oy nằm trên điểm O	$d > 0$

	Giao điểm với *Oy* nằm dưới điểm *O*	$d < 0$
	Giao điểm với *Oy* trùng với điểm *O*	$d = 0$
b, c	Đồ thị không có điểm cực trị nào	$\Delta'_{y'} = (B')^2 - AC = b^2 - 3ac \le 0$
	Đồ thị có hai điểm cực trị	$\Delta'_{y'} = (B')^2 - AC = b^2 - 3ac > 0$
	Tâm đối xứng nằm bên phải Oy	$-\dfrac{B}{A} > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2b}{3a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0$
	Tâm đối xứng nằm bên trái Oy	$-\dfrac{B}{A} < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2b}{3a} < 0 \Leftrightarrow ab > 0.$
	Hai điểm cực trị nằm cùng phía Ox	$x_1x_2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{C}{A} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{c}{3a} > 0 \Leftrightarrow ac > 0$
	Hai điểm cực trị nằm khác phía Ox	$x_1x_2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{C}{A} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{c}{3a} < 0 \Leftrightarrow ac < 0$

☞ ***Chú ý:*** ***Đôi khi, ta thấy đồ thị đi qua điểm $(x_0; y_0)$ cho trước, ta thay tọa độ này vào hàm số để có 1 phương trình. Điều này đúng cho mọi hàm số.***

2. Hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \ne 0)$

$$\longrightarrow y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$$

Hệ số	Dấu hiệu đồ thị	Kết luận
a	Nhánh phải đồ thị đi lên	$a > 0$
	Nhánh phải đồ thị đi xuống	$a < 0$
c	Giao điểm với *Oy* nằm trên điểm *O*	$c > 0$
	Giao điểm với *Oy* nằm dưới điểm *O*	$c < 0$
	Giao điểm với *Oy* trùng với điểm *O*	$c = 0$
b	Đồ thị hàm số có ba cực trị	$ab < 0$
	Đồ thị hàm số có một cực trị	$ab \ge 0, \ (a \ne 0)$

3. Hàm số nhất biến $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad (c \ne 0,\ ad - bc \ne 0)$

$$\longrightarrow y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$$

Hệ số	Dấu hiệu đồ thị	Kết luận
c và d	Tiệm cận đứng nằm bên phải Oy	$-\dfrac{d}{c} > 0 \Rightarrow cd < 0$
	Tiệm cận đứng nằm bên trái Oy	$-\dfrac{d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0$
a và c	Tiệm cận ngang nằm phía trên Ox	$\dfrac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0$
	Tiệm cận ngang nằm phía dưới Ox	$\dfrac{a}{c} < 0 \Rightarrow ac < 0$
a và b	Giao điểm của đồ thị với Ox nằm bên phải gốc O	$-\dfrac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$
	Giao điểm của đồ thị với Ox nằm bên trái gốc O	$-\dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow ab > 0$

b	Đồ thị đi qua gốc O(0;0)	$b=0$
b* và *d	Giao điểm của đồ thị với O*y* nằm trên gốc O	$\frac{b}{d}>0 \Rightarrow bd>0$
	Giao điểm của đồ thị với O*y* nằm dưới gốc O	$\frac{b}{d}<0 \Rightarrow bd<0$
a, b, c, d	Mỗi nhánh đồ thị đi lên (từ trái sang phải)	$ad-bc>0$
	Mỗi nhánh đồ thị đi xuống (từ trái sang phải)	$ad-bc<0$

PHÉP SUY ĐỒ THỊ TỪ ĐỒ THỊ CÓ SẴN

1. Phép tịnh tiến và đối xứng đồ thị

Cho hàm $y=f(x)$ có đồ thị (C)

Đồ thị cần tìm	Cách biến đổi	Minh họa
$(C_1): y=f(x)+a$	Tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Oy lên phía trên a đơn vị.	y; (C_1); đi lên a đơn vị; O; x; (C)
$(C_2): y=f(x)-a$	Tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Oy xuống phía dưới a đơn vị.	y; O; x; (C); đi xuống a đơn vị; (C_2)
$(C_3): y=f(x+a)$	Tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Ox qua trái a đơn vị.	y; O; x; (C_3); (C); sang trái a đơn vị
$(C_4): y=f(x-a)$	Tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Ox qua phải a đơn vị.	y; O; x; (C); (C_4); sang phải a đơn vị

$(C_5): y = -f(x)$	Lấy đối xứng (C) qua Ox .	
$(C_6): y = f(-x)$	Lấy đối xứng (C) qua Oy .	

2. Đồ thị hàm chứa giá trị tuyệt đối

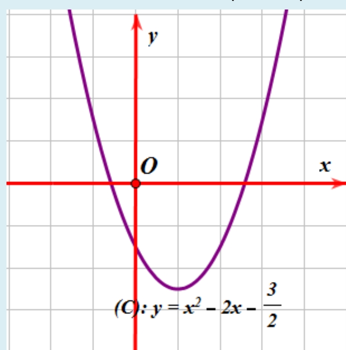
a) Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ ta suy ra đồ thị $(C_1): y = |f(x)|$.

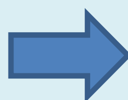
Ta có $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \ge 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$.

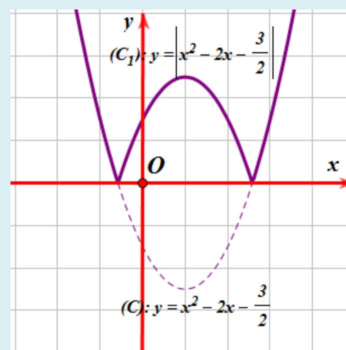
Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên Ox , ta được (C') .

Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị (C) phía dưới Ox qua Ox , ta được (C'') .

Kết luận: Đồ thị $(C_1): y = |f(x)|$ là hợp của (C') với (C''). Xem **ví dụ minh họa** sau:







b) Từ đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ ta suy ra đồ thị $(C_2): y = f(|x|)$.

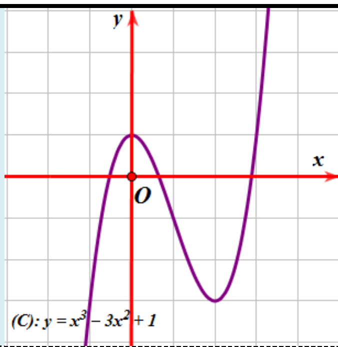
Ta có $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \ge 0 \\ f(-x) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.

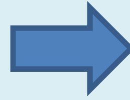
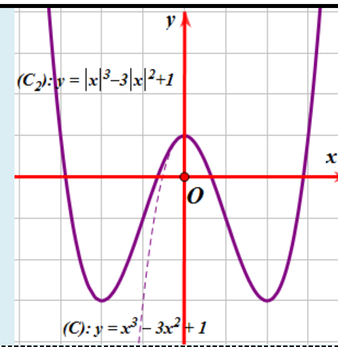
Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy , ta được (C').

Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị (C') qua trục Oy , ta được (C'') .

(Đây là tính chất đối xứng của đồ thị hàm số chẵn)

Kết luận: Đồ thị $(C_2): y = f(|x|)$ là hợp của (C') với (C''). Xem **ví dụ minh họa** sau:



CÔNG THỨC BỔ TRỢ CHO QUÁ TRÌNH GIẢI TOÁN HÀM SỐ

Bổ trợ về tam thức bậc hai

Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ (*)

- (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases}$
- (*) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c<0$.

☞ Định lí Vi-ét : $\begin{cases} S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a} \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases} \xrightarrow{\text{Áp dụng}} x_1^2+x_2^2=S^2-2P;\;\; x_1^3+x_2^3=S^3-3SP;\; (x_1-x_2)^2=S^2-4P;$

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{S^2-4P}$. Trong trắc nghiệm, ta nên dùng công thức : $\boxed{|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}}$.

- (*) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0,\ \Delta>0 \\ S>0,\ P>0 \end{cases}$.
- (*) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0,\ \Delta>0 \\ S<0,\ P>0 \end{cases}$.

Bổ trợ hình học giải tích phẳng

- Nếu ΔABC có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(b_1;b_2) \\ \overrightarrow{AC}=(c_1;c_2) \end{cases}$ thì $\boxed{S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|b_1c_2-b_2c_1|}$
- $\Delta ABC\perp$ tại $A\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow b_1c_1+b_2c_2=0$.
- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.
- Khoảng cách từ điểm $M(x_M;y_M)$ đến $\Delta: ax+by+c=0$ là $\boxed{d(M;\Delta)=\dfrac{|ax_M+by_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.
- Đặc biệt: $d(M;Ox)=|y_M|,\ d(M;Oy)=|x_M|$.

IX. LŨY THỪA – MŨ VÀ LOGARIT

1. Công thức lũy thừa

Cho các số dương $a,\ b$ và $m,\ n\in\mathbb{R}$. Ta có:

▪ $a^0=1$	▪ $a^n=\underbrace{a.a.........a}_{n\text{ thừa số}}$ với $n\in\mathbb{N}^*$	▪ $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$
▪ $(a^m)^n=a^{mn}=(a^n)^m$	▪ $a^m.a^n=a^{m+n}$	▪ $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$
▪ $a^nb^n=(ab)^n$	▪ $\dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$	▪ $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$ $\begin{cases} *\ \sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}} \\ *\ \sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}} \end{cases}$ $(m,\ n\in\mathbb{N}^*)$

2. Công thức logarit:

Cho các số $a, b>0,\ a\neq 1$ và $m, n\in\mathbb{R}$. Ta có:

▪ $\log_a b=\alpha \Leftrightarrow a^\alpha=b$	▪ $\lg b=\log b=\log_{10} b$	▪ $\ln b=\log_e b$
▪ $\log_a 1=0$	▪ $\log_a a=1$	▪ $\log_a a^n=n$
▪ $\log_{a^m} b=\frac{1}{m}\log_a b$	▪ $\log_a b^n=n\log_a b$	▪ $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$
▪ $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$	▪ $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$	▪ $\begin{cases} a^{\log_a b}=b \\ a^{\log_b c}=c^{\log_b a}\end{cases}$
▪ $\log_a b.\log_b c=\log_a c, (b\neq 1)$	▪ $\frac{\log_a c}{\log_a b}=\log_b c$, $(b\neq 1)$	▪ $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$, $(b\neq 1)$

BÀI TOÁN NGÂN HÀNG

1. Công thức tính lãi đơn	Nếu ta gởi tiền vào ngân hàng theo hình thức **tiền lãi chỉ được tính dựa vào tiền gốc ban đầu** (tức là tiền lãi của kỳ hạn trước **không gộp vào vốn để tính lãi cho kỳ hạn kế tiếp**), đây gọi là hình thức **lãi đơn**. Ta có: $T=A(1+nr)$ *với A: tiền gởi ban đầu; r: lãi suất; n: kỳ hạn gởi; T: tổng số tiền nhận sau kỳ hạn n.* **Lưu ý:** *r và n phải khớp đơn vị; T bao gồm cả A, muốn **tính số tiền lời** ta lấy $T-A$.*
2. Công thức lãi kép	Nếu ta gởi tiền vào ngân hàng theo hình thức: **hàng tháng tiền lãi phát sinh sẽ được cộng vào tiền gốc cũ để tạo ra tiền gốc mới** và cứ tính tiếp như thế, đây gọi là hình thức **lãi kép**. Ta có: $T=A(1+r)^n$ *với A: tiền gởi ban đầu; r: lãi suất; n: kỳ hạn gởi; T: tổng số tiền nhận sau kỳ hạn n.* **Lưu ý:** *r và n phải khớp đơn vị; T bao gồm cả A, muốn **tính số tiền lời** ta lấy $T-A$.*
3. Mỗi tháng gởi đúng số tiền giống nhau theo hình thức lãi kép	Nếu đầu mỗi tháng khách hàng luôn gởi vào ngân hàng số tiền *A* đồng với lãi kép $r\%$/tháng thì số tiền họ nhận được cả vốn lẫn lãi sau *n* tháng là: $T=\frac{A}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r)$.
4. Gởi tiền vào ngân hàng rồi rút ra hàng tháng số tiền cố định	Nếu khách hàng gởi vào ngân hàng số tiền *A* đồng với lãi suất $r\%$/tháng. Vào ngày ngân hàng tính lãi mỗi tháng thì rút ra *X* đồng. Số tiền thu được sau *n* tháng là: $T=A(1+r)^n-X\frac{(1+r)^n-1}{r}$
5. Vay vốn và trả góp (tương tự bài toán 4)	Nếu khách hàng vay ngân hàng số tiền *A* đồng với lãi suất *r*%/tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi lần hoàn nợ đúng số tiền *X* đồng. Số tiền khách hàng còn nợ sau *n* tháng là: $T=A(1+r)^n-X\frac{(1+r)^n-1}{r}$

3. Hàm số lũy thừa, mũ và logarit:

HÀM LŨY THỪA	HÀM SỐ MŨ	HÀM SỐ LOGARIT
▪ **Dạng:** $\begin{cases} y=x^\alpha \\ y=u^\alpha\end{cases}$ với u là đa thức đại số.	▪ **Dạng:** $\begin{cases} y=a^x \\ y=a^u\end{cases}$ với $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1\end{cases}$. ▪ **Tập xác định:** $D=\mathbb{R}$. ▪ **Đạo hàm:**	▪ **Dạng:** $\begin{cases} y=\log_a x \\ y=\log_a u\end{cases}$ với $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1\end{cases}$. ▪ **Đặc biệt:** $a=e\longrightarrow y=\ln x$; $a=10\longrightarrow y=\log x=\lg x$. ▪ **Điều kiện xác định:** $u>0$.

- **Tập xác định:**

Nếu $\alpha \in \mathbb{Z}^{+} \xrightarrow{ĐK} u \in \mathbb{R}$.

Nếu $\left[\begin{array}{l}\alpha \in \mathbb{Z}^{-} \\ \alpha = 0\end{array}\right. \xrightarrow{ĐK} u \neq 0$.

Nếu $\alpha \notin \mathbb{Z} \xrightarrow{ĐK} u > 0$.

- **Đạo hàm:**

$$\left\langle\begin{array}{l} y = x^{\alpha} \longrightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1} \\ y = u^{\alpha} \longrightarrow y' = \alpha u^{\alpha-1}.\boxed{u'}\end{array}\right.$$

$$\left\langle\begin{array}{l} y = a^{x} \longrightarrow y' = a^{x}\ln a \\ y = a^{u} \longrightarrow y' = a^{u}\ln a.\boxed{u'}\end{array}\right..$$

Đặc biệt: $\left\langle\begin{array}{l}(e^{x})' = e^{x} \\ (e^{u})' = e^{u}.\boxed{u'}\end{array}\right.$ với

$e \approx 2{,}71828...$

- **Sự biến thiên**: $y = a^{x}$.

Nếu $\boxed{a > 1}$ thì hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nếu $\boxed{0 < a < 1}$ thì hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- **Đạo hàm:**

$$\left\langle\begin{array}{l} y = \log_a x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{x\ln a} \\ y = \log_a u \longrightarrow y' = \dfrac{\boxed{u'}}{u\ln a}\end{array}\right..$$

Đặc biệt: $\left\langle\begin{array}{l}(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \\ (\ln u)' = \dfrac{\boxed{u'}}{u}\end{array}\right..$

- **Sự biến thiên:** $y = \log_a x$. Nếu $\boxed{a > 1}$: hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$. Nếu $\boxed{0 < a < 1}$: hàm nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

4. Đồ thị hàm số mũ và logarit:

ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ

- Ta thấy: $a^{x} \downarrow \Rightarrow 0 < a < 1$; $b^{x} \downarrow \Rightarrow 0 < b < 1$.
- Ta thấy: $c^{x} \uparrow \Rightarrow c > 1$; $d^{x} \uparrow \Rightarrow d > 1$.
- **So sánh *a* với *b*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **trái sang phải**, trúng a^{x} trước nên $a > b$.
- **So sánh *c* với *d*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **trái sang phải**, trúng c^{x} trước nên $c > d$.
- Vậy $0 < b < a < 1 < d < c$.

ĐỒ THỊ HÀM SỐ LOGARIT

- Ta thấy: $\log_a x \downarrow \Rightarrow 0 < a < 1$; $\log_b x \downarrow \Rightarrow 0 < b < 1$.
- Ta thấy: $\log_c x \uparrow \Rightarrow c > 1$; $\log_d x \uparrow \Rightarrow d > 1$.
- **So sánh *a* với *b*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **phải sang trái**, trúng $\log_b x$ trước: $b > a$.
- **So sánh *c* với *d*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **phải sang trái**, trúng $\log_d x$ trước: $d > c$.
- Vậy $0 < a < b < 1 < c < d$.

5. Phương trình mũ và logarit:

Phương trình mũ

1. Dạng cơ bản: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

2. Dạng logarit hóa:

$$\left[\begin{array}{l} a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b \\ a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b\end{array}\right. \quad (a, b > 0,\ a \neq 1)$$

Phương trình Logarit

1. Dạng cơ bản:

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) > 0$

2. Dạng mũ hóa: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^{b}$

(không cần điều kiện)

3. Dạng đặt ẩn phụ:

- Đặt $t = a^{f(x)} > 0$
- Đưa phương trình đã cho về bậc n theo $t \longrightarrow$ giải tìm t.
- Với t có được, thay vào $t = a^{f(x)}$ để tìm x.

a) Phương trình $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0$

• Đặt $t = a^{f(x)} > 0$.

• PT: $mt^2 + nt + p = 0$.

b) Phương trình $m.a^{g(x)} + n.b^{g(x)} + p.c^{g(x)} = 0$

• Nhận dạng: $ma^{2f(x)} + n(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$

• Chia hai vế PT cho $b^{2f(x)} \neq 0$, ta được

$m\left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + n\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + p = 0$. **(Xem a))**

__Chú ý:__ Ta có thể chia PT cho bất kỳ hàm mũ nào trong ba hàm $\{a^{g(x)}; b^{g(x)}; c^{g(x)}\}$, kết quả không thay đổi.

c) Phương trình $m.(a+\sqrt{b})^{f(x)} + n(a-\sqrt{b})^{f(x)} = p$

• Nhận dạng: $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2 - b = 1$

• Đặt $t = (a+\sqrt{b})^{f(x)}, t > 0 \Rightarrow \frac{1}{t} = (a-\sqrt{b})^{f(x)}$

• PT: $mt + \frac{n}{t} = p \Leftrightarrow mt^2 - pt + n = 0$

3. Dạng đặt ẩn phụ:

- Đặt $t = \log_a f(x)$
- Đưa pt đã cho về bậc n theo $t \longrightarrow$ giải tìm t.
- Có t, thay vào $t = \log_a f(x)$ để tìm x.

a) Phương trình $m\log_a^2 f(x) + n\log_a f(x) + p = 0$

• Đặt $t = \log_a f(x)$

• PT: $mt^2 + nt + p = 0$

b) Phương trình $m.\log_a f(x) + n.\log_{f(x)} a + p = 0$

• ĐK: $f(x) > 0,\ f(x) \neq 1$

• Đặt $t = \log_a f(x) \Rightarrow \frac{1}{t} = \log_{f(x)} a$

• PT: $mt + \frac{n}{t} + p = 0 \Leftrightarrow mt^2 + pt + n = 0$

c) Phương trình đơn giản chứa $\left\langle \begin{matrix} \log_a f(x) \\ \log_b g(x) \end{matrix} \right.$

• Đặt $t = \log_a f(x) \Leftrightarrow f(x) = a^t$

• Thay trở lại phương trình, ta có một phương trình mới đơn giản hơn (chứa ít logarit hơn).

6. Bất phương trình mũ và logarit:

Bất Phương trình mũ	Bất Phương trình Logarit
▪ Dạng cơ bản: $\left[\begin{matrix} * \ a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \overset{a>1}{\Leftrightarrow} f(x) \geq g(x) \\ * \ a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \overset{0<a<1}{\Leftrightarrow} f(x) \leq g(x) \end{matrix}\right.$	▪ Dạng cơ bản: $\left[\begin{matrix} * \ \log_a f(x) \geq \log_a g(x) \overset{a>1}{\Leftrightarrow} f(x) \geq g(x) > 0 \\ * \ \log_a f(x) \geq \log_a g(x) \overset{0<a<1}{\Leftrightarrow} 0 < f(x) \leq g(x) \end{matrix}\right.$

☞Lưu ý: Cách nhận dạng bất phương trình mũ-logarit cũng giống với cách nhận dạng phương trình mũ-logarit. Học sinh tham khảo kỹ mục 5 để có phương pháp giải bất phương trình một cách hiệu quả.

X. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

1. Công thức nguyên hàm:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

▪ $\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx$	▪ $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	▪ $\int f'(x)dx = f(x) + C$

1) $\int kdx = kx + C$	▪ $\int 2dx = 2x + C$	▪ $\int (-3)dx = -3x + C$
2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	▪ $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$	▪ $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$
$\xrightarrow{MR} \int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	▪ $\int (1-2x)^{10}dx = \frac{1}{-2}.\frac{(1-2x)^{11}}{11} + C = \frac{(1-2x)^{11}}{-22} + C$	

3) $\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C \xrightarrow{MR} \int \frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C$	▪ $\int \frac{1}{1-3x}dx=\frac{1}{-3}\ln\lvert 1-3x\rvert+C$
4) $\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C \xrightarrow{MR} \int \frac{1}{(ax+b)^2}dx=\frac{1}{a}.\frac{-1}{ax+b}+C$	▪ $\int \frac{1}{(2x-3)^2}dx=\frac{1}{2}.\frac{-1}{2x-3}+C=-\frac{1}{4x-6}+C$
▪ $\int \left(x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-10\right)dx=\frac{x^3}{3}+\ln\lvert x\rvert-\frac{1}{x}-10x+C$	▪ $\int \frac{x^5+1}{x}dx=\int \left(x^4+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^5}{5}+\ln\lvert x\rvert+C$
5) $\int e^x dx=e^x+C \xrightarrow{MR} \int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$	▪ $\int e^{-x}dx=\frac{1}{-1}e^{-x}+C=-e^{-x}+C$
6) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	▪ $\int 5^x dx=\frac{5^x}{\ln 5}+C$ ▪ $\int 3^{2x}dx=\int 9^x dx=\frac{9^x}{\ln 9}+C$
$\xrightarrow{MR} \int a^{bx+c}dx=\frac{1}{b}.\frac{a^{bx+c}}{\ln a}+C$	▪ $\int 3^{2x+5}dx=\frac{1}{2}.\frac{3^{2x+5}}{\ln 3}+C=\frac{3^{2x+5}}{2\ln 3}+C$
▪ $\int \left(e^{x-1}-2\right)e^x dx=\int \left(e^{2x-1}-2e^x\right)dx=\frac{1}{2}e^{2x-1}-2e^x+C$	▪ $\int 2^x.3^{x-1}dx=\int 2^x.3^x.\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}\int 6^x dx=\frac{6^x}{3\ln 6}+C$
7) $\int \sin xdx=-\cos x+C$ $\xrightarrow{MR} \int \sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$	▪ $\int \sin\underbrace{\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)}_{a=4;\ b=-\frac{\pi}{2}}dx=-\frac{1}{4}\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)+C$
8) $\int \cos xdx=\sin x+C$ $\xrightarrow{MR} \int \cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$	▪ $\int \cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}_{a=-1;\ b=\frac{\pi}{3}}dx=\frac{1}{-1}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+C=-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+C$
▪ $\int (3\sin x-2\cos x)dx=-3\cos x-2\sin x+C$	▪ $\int \sin^2 xdx=\int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$
9) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\int \left(1+\tan^2 x\right)dx=\tan x+C$ $\xrightarrow{MR} \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx=\frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$ $\xrightarrow{MR} \int \left[1+\tan^2(ax+b)\right]dx=\frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$	▪ $\int \frac{1-2\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-2\right)dx=\tan x-2x+C$ ▪ $\int \frac{1}{\cos^2 3x}dx=\frac{1}{3}\tan 3x+C$ ▪ $\int \left[1+\tan^2\underbrace{(\pi-2x)}_{a=-2;\ b=\pi}\right]dx=\frac{1}{-2}\tan(\pi-2x)+C$
10) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=\int \left(1+\cot^2 x\right)dx=-\cot x+C$ $\xrightarrow{MR} \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx=-\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$ $\xrightarrow{MR} \int \left[1+\cot^2(ax+b)\right]dx=-\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$	▪ $\int \frac{x\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx=\int \left(x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\frac{x^2}{2}-\cot x+C$ ▪ $\int \frac{1}{\sin^2 8x}dx=-\frac{1}{8}\cot 8x+C$ ▪ $\int \left(1+\cot^2 3x\right)dx=-\frac{1}{3}\cot 3x+C$
▪ $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\tan x-\cot x+C$	

2. Tích phân:

a) **Định nghĩa:** $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$ với $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a;b]$.

b) **Tính chất:**

$\int_a^a f(x)dx = 0$	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k là hằng số)	$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$
Nếu $f(x)\ge 0,\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0.$	
Nếu $f(x)\ge g(x),\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx.$	

Đặc biệt:

- Nếu hàm $y=f(x)$ là **hàm số lẻ** trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$
- Nếu hàm $y=f(x)$ là **hàm số chẵn** trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

3. Phương pháp tính tích phân:

a) **Phương pháp tích phân từng phần:**

Quy tắc chung: $I=\int_a^b u.dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$. Ta xét các dạng phổ biến sau:

❖ **Dạng $\int_a^b P(x).Q(x).dx$ với $P(x)$ là đa thức đại số, $Q(x)$ là hàm lượng giác hoặc hàm mũ.**

$\xrightarrow{PP} \begin{cases} u=P(x) \\ dv=Q(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=P'(x)dx \\ v=\int Q(x)dx \end{cases}.$

Lưu ý: $v=\int Q(x)dx$ nên kết quả có dạng $R(x)+C$, ta chủ

Minh họa:

- $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)\sin xdx$.

  Đặt $\begin{cases} u=2x-1 \\ dv=\sin xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=2dx \\ v=\int \sin xdx = \underbrace{-\cos x}_{chọn\ C=0} \end{cases}.$

  Ta có: $I=\int_a^b u.dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

  $=-(2x-1)\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos xdx = ...$

- $J=\int_0^1 (1-x)e^{2x}dx$.

  Đặt $\begin{cases} u=1-x \\ dv=e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=-dx \\ v=\int e^{2x}dx = \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{chọn\ C=0} \end{cases}.$

động chọn 1 giá trị C có lợi cho tính toán sau này.	$J=\frac{1}{2}(1-x)e^{2x}\Big\vert_0^1+\int_0^1\frac{1}{2}e^{2x}dx=......$
❖ **Dạng $\int_a^b P(x).Q(x).dx$ với $P(x)$ là đa thức đại số hoặc phân thức, $Q(x)$ là hàm logarit.** $\xrightarrow{PP}\begin{cases}u=Q(x)\\ dv=P(x)dx\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}du=Q'(x)dx\\ v=\int P(x)dx\end{cases}.$	**Minh họa:** ▪ $I=\int_1^e x^2\ln xdx$. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\end{cases}.$ $I=\frac{x^3}{3}\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}dx=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=......$ ▪ $J=\int_1^e\frac{\ln x}{(x+1)^2}$. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\frac{1}{(x+1)^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=\underbrace{-\frac{1}{x+1}+1}_{chọn\ C=1}=\frac{x}{x+1}\end{cases}.$ $J=\frac{x}{x+1}\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\frac{x}{x+1}.\frac{1}{x}dx=\frac{e}{e+1}-\ln\lvert x+1\rvert\Big\vert_1^e=...$

b) Phương pháp tích phân đổi biến:

❖ **Đổi biến loại 1:** Xét tích phân dạng $I=\int_a^b f[u(x)].u'(x)dx$.

$\xrightarrow{PP}$ Đặt $t=u(x)\Rightarrow dt=u'(x)dx$. Đổi cận: $x=a\Rightarrow t_1=u(a),\ x=b\Rightarrow t_2=u(b)$.

Khi đó tích phân cần tính là: $I=\int_{t_1}^{t_2}f(t)dt$. **Ta xét các dạng phổ biến sau:**

1) Dạng $I=\int_a^b f(x^n)\boxed{x^{n-1}dx}$. $\xrightarrow{PP}t=\alpha x^n+\beta$ (hoặc $t=x^n$)	$I=\int_0^1\frac{1}{x^3+1}\boxed{x^2dx}$ • Đặt $t=x^3+1\Rightarrow dt=3\boxed{x^2dx}\Rightarrow\boxed{x^2dx}=\frac{1}{3}dt$. • Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1,\ x=1\Rightarrow t=2$. • Ta có: $I=\int_1^2\frac{1}{t}.\frac{1}{3}dt=......$
2) Dạng $I=\int_a^b f(\sqrt[n]{u}).\boxed{u'.dx}$. $\xrightarrow{PP}t=\sqrt[n]{u}\Rightarrow t^n=u$.	$I=\int_0^{\sqrt{7}}\sqrt[3]{x^2+1}.\boxed{xdx}$ • Đặt $t=\sqrt[3]{x^2+1}\Rightarrow t^3=x^2+1\Rightarrow 3t^2dt=2\boxed{xdx}$ $\Rightarrow\boxed{xdx}=\frac{3}{2}t^2dt$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1,\ x=\sqrt{7}\Rightarrow t=2$.

	• $I=\int_1^2 t.\frac{3}{2}t^2dt=\frac{3}{2}\int_1^2 t^3dt=......$
3) Dạng $I=\int_a^b f\left(\frac{1}{x}\right).\boxed{\frac{1}{x^2}.dx}$. $\xrightarrow{PP} t=\alpha.\frac{1}{x}+\beta$ hay $t=\frac{1}{x};\ t=\sqrt[n]{\alpha\frac{1}{x}+\beta}$ v.v…	$I=\int_1^4\sqrt{1-\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^2}dx$ • Đặt $t=\sqrt{1-\frac{1}{x}}\Rightarrow t^2=1-\frac{1}{x}\Rightarrow 2tdt=\frac{1}{x^2}dx$. • Ta có: $I=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}t^2.dt=......$
4) Dạng $I=\int_a^b f\left(\sqrt{x}\right).\boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}.dx}$. $\xrightarrow{PP} t=\alpha\sqrt{x}+\beta$ hay $t=\sqrt{x}$...	$I=\int_1^4\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}.\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ • Đặt $t=\sqrt{x}+1\Rightarrow dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\Rightarrow 2dt=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$. • Ta có: $I=\int_2^3\frac{1}{t^2}.2dt=.......$
5) Dạng $I=\int_a^b f\left(e^x\right).\boxed{e^x.dx}$. $\xrightarrow{PP} t=\alpha e^x+\beta$ hay $t=e^x$.	$I=\int_0^1\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx\longrightarrow I=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}e^xdx$. • Đặt $t=e^x+1\Rightarrow\begin{cases}dt=e^xdx\\ e^x=t-1\end{cases}$. Khi đó: $I=\int_2^{e+1}\frac{t-1}{t}dt$. • $I=\int_2^{e+1}\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=......$
6) Dạng $I=\int_a^b f(\ln x).\boxed{\frac{1}{x}.dx}$. $\xrightarrow{PP} t=\alpha\ln x+\beta$ hay $t=\ln x$.	$I=\int_1^{e^2}\frac{2\ln x-1}{x}dx\longrightarrow I=\int_1^{e^2}(2\ln x-1).\frac{1}{x}dx$. • Đặt $t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$. • Khi đó $I=\int_0^2(2t-1)dt=\left(t^2-t\right)\Big\|_0^2=......$
7) Dạng $I=\int_a^b f(\sin x).\boxed{\cos xdx}$ $\xrightarrow{PP} t=\alpha\sin x+\beta$ hay $t=\sin x$.	$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$ • Đặt $t=1+2\sin x\Rightarrow dt=2\cos xdx\Rightarrow\frac{1}{2}dt=\cos xdx$. • Khi đó $I=\int_1^3\frac{\frac{1}{2}dt}{t}=\frac{1}{2}\ln\|t\|\Big\|_1^3=.......$
8) Dạng $I=\int_a^b f(\cos x).\boxed{\sin xdx}$. $\xrightarrow{PP} t=\alpha\cos x+\beta$ hay $t=\cos x$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x-\cos x+1)\sin xdx$ $\longrightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2 x-\cos x\right)\sin xdx$. • Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx\Rightarrow -dt=\sin xdx$. • Khi đó: $I=\int_1^0\left(2t^2-t\right)(-dt)=\int_0^1\left(2t^2-t\right)dt=......$

9) Dạng $I=\int_a^b f(\tan x)\boxed{\frac{1}{\cos^2 x}dx}$. $\xrightarrow{PP} t=\alpha\tan x+\beta$ hay $t=\tan x$.	$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}dx$ • Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx$. • Khi đó: $I=\int_0^{\sqrt{3}}t^3dt=......$
10) Dạng $I=\int_a^b f(\cot x)\boxed{\frac{1}{\sin^2 x}dx}$. $\xrightarrow{PP} t=\alpha\cot x+\beta$ hay $t=\cot x$.	$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cot^2 x-1}{\cot x.\sin^2 x}dx \longrightarrow I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cot^2 x-1}{\cot x}.\frac{1}{\sin^2 x}dx$. • Đặt $t=\cot x\Rightarrow dt=-\frac{1}{\sin^2 x}dx\Rightarrow -dt=\frac{1}{\sin^2 x}dx$. • $I=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{t^2-1}{t}(-dt)=......$
11) Dạng $I=\int_a^b f\begin{pmatrix}\sin^2 x\\ \cos^2 x\\ \cos 2x\end{pmatrix}\boxed{\sin 2x.dx}$. $\xrightarrow{PP}\left[\begin{array}{l}t=\sin^2 x\\ t=\cos^2 x\\ t=\cos 2x\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}dt=\sin 2x.dx\\ dt=-\sin 2x.dx\\ dt=-2\sin 2x.dx\end{array}\right.$	$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^2 x+3\right)\sin 2xdx$ • Đặt $t=\sin^2 x\Rightarrow dt=2\sin x(\sin x)'dx=\sin 2xdx$. • Ta có: $I=\int_0^{\frac{1}{2}}(t+3)dt=......$

❖ **Đổi biến loại 2:** Xét tích phân dạng $I=\int_a^b f(x)dx$ trong đó $f(x)$ phức tạp và không thể tính nguyên hàm trực tiếp. **Đổi biến loại 2** là ta đặt: $x=u(t)\Rightarrow dx=u'(t)dt$. **Ta xét 4 dạng phổ biến sau:**

1) Dạng $I=\int_{x_1}^{x_2} f(\sqrt{a^2-x^2})dx$. $\xrightarrow{PP} x=a\sin t$ (hay $x=a\cos t$).	$I=\int_0^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ • Đặt $x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos tdt$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0,\quad x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$. Ta có: $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=\sqrt{4\cos^2 t}=\underset{\geq 0}{2\cos t}$ do $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. • Ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos tdt}{2\cos t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}$.
2) Dạng $I=\int_{x_1}^{x_2} f(\sqrt{a^2+x^2})dx$ hay $\int_{x_1}^{x_2} f\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)dx$. $\xrightarrow{PP} x=a\tan t$.	$I=\int_0^3\frac{1}{x^2+9}dx$ • Đặt $x=3\tan t\Rightarrow dx=3(1+\tan^2 t)dt$. • Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0,\ x=3\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$. • Khi đó: $x^2+9=9\tan^2 t+9=9(\tan^2 t+1)$.

	• Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3(1+\tan^2 t)dt}{9(\tan^2 t+1)}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{12}$.
3) Dạng $I=\int_{x_1}^{x_2}f(\sqrt{x^2-a^2})dx$ $\xrightarrow{PP} x=\frac{a}{\sin t}$ hay $x=\frac{a}{\cos t}$	$I=\int_2^4\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$ • Đặt $x=\frac{2}{\cos t}\Rightarrow dx=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt$. • Đổi cận: $x=2\Rightarrow t=0,\ x=4\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$. • Khi đó: $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}-4}}{\frac{2}{\cos t}}.\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 t.dt$ $=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right).dt=2\left(\tan t-t\right)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$.
4) Dạng $I=\int_{x_1}^{x_2}f\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)dx$ $\xrightarrow{PP} x=a\cos 2t$.	$I=\int_0^2\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}dx$ • Đặt $x=2\cos 2t\Rightarrow dx=-4\sin 2t.dt=-8\sin t.\cos t.dt$ • Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{4},\ x=2\Rightarrow t=0$. Ta có: $\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}=\sqrt{\frac{2-2\cos 2t}{2+2\cos 2t}}=\sqrt{\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}}=\frac{\sin t}{\cos t}$. • $I=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{\cos t}\sin t.\cos tdt=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 tdt=......$

4. Ứng dụng tích phân để tính diện tích – thể tích:

▪ Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục Ox, $x=a,\ x=b$ thì có diện tích: $S=\int_a^b\vert f(x)\vert dx$	▪ Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a,\ x=b$ thì có diện tích: $S=\int_a^b\vert f(x)-g(x)\vert dx$
▪ Khi xoay hình phẳng $\begin{cases}y=f(x)\\x=a,\ x=b\end{cases}$ quanh Ox, ta được khối trụ tròn có thể tích $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$	▪ Khi xoay hình phẳng $\begin{cases}y=f(x)\\y=g(x)\\x=a,\ x=b\end{cases}$ quanh Ox, được khối trụ tròn có thể tích $V=\pi\int_a^b\left\vert f^2(x)-g^2(x)\right\vert dx$.

- Xét hình khối được giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=a,\ x=b$. Khi cắt khối này ta được thiết diện có diện tích $S(x)$ (là hàm liên tục trên $[a;b]$). Thể tích khối này trên $[a;b]$ là: $\boxed{V=\int_a^b S(x)dx}$.

5. Công thức chuyển động:

Xét hàm quảng đường $S(t)$, hàm vận tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$. Ba hàm này sẽ biến thiên theo t.

▪ $S(t)=\int v(t)dt \Leftrightarrow v(t)=S'(t)$	▪ $v(t)=\int a(t)dt \Leftrightarrow a(t)=v'(t)$

XI. SỐ PHỨC VÀ CÁC YẾU TỐ LIÊN QUAN

Số phức có dạng: $z=a+bi$ với $\begin{cases} a,b\in\mathbb{R} \\ i^2=-1 \end{cases}$ (i: là đơn vị ảo). Ký hiệu tập số phức: $\mathbb{C}$.

Thành phần	Hình học	Minh họa
▪ **Phần thực:** a. Nếu $a=0$ thì $z=bi$ được gọi là **số thuần ảo.** ▪ **Phần ảo**: b. Nếu $b=0$ thì $z=a$ là **số thực**. ▪ Khi $a=b=0$ thì $z=0$ vừa là **số thuần ảo** vừa là **số thực**.	▪ Điểm $M(a;b)$ biểu diễn cho z trên hệ trục Oxy. ▪ **Mô-đun:** $\lvert z\rvert=OM=\sqrt{a^2+b^2}$.	y, $M(a;b)$, b, z, x, a, O

Số phức liên hợp – Hai số phức bằng nhau	Căn bậc hai	Phương trình bậc hai
Cho $z=a+bi$ và $z'=a'+b'i$ Khi đó: ▪ **Số phức liên hợp** của z là $\bar{z}=a-bi$. ▪ $z=z'\Leftrightarrow\begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$. ▪ $z=0\Leftrightarrow\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$.	▪ Căn bậc hai của $a>0$ là $\pm\sqrt{a}$. ▪ Căn bậc hai của $a<0$ là $\pm i\sqrt{-a}$. ▪ Căn bậc hai của số phức $z=a+bi$ là hai số phức dạng $w=x+yi$ với $\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$.	▪ Phương trình $z^2=a>0$ có hai nghiệm phức $z=\pm\sqrt{a}$. ▪ Phương trình $z^2=a<0$ có hai nghiệm phức $z=\pm i\sqrt{-a}$. ▪ Phương trình $az^2+bz+c=0\ (a\neq 0)$ với $\Delta<0$ sẽ có hai nghiệm phức là: $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Công thức bổ trợ	Cho hai số phức $z_1,\ z_2$, có: ▪ $\lvert z_1z_2\rvert=\lvert z_1\rvert.\lvert z_2\rvert$. ▪ $\left\lvert\dfrac{z_1}{z_2}\right\rvert=\dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$ với $z_2\neq 0$. ▪ $\lvert z_1-z_2\rvert=MN$ với M, N theo thứ tự là hai điểm biểu diễn cho $z_1,\ z_2$.

Dấu hiệu cơ bản nhận biết tập hợp điểm *M* biểu diễn cho số phức z

- $ax+by+c=0 \xrightarrow{KL}$ Tập hợp điểm M một là **đường thẳng**.
- $\left[\begin{array}{l} (x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \\ x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \end{array}\right. \xrightarrow{KL}$ Tập hợp điểm M là **đường tròn** có tâm $I(a;b)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
- $\left[\begin{array}{l} (x-a)^2+(y-b)^2\le R^2 \\ x^2+y^2-2ax-2by+c\le 0 \end{array}\right. \xrightarrow{KL}$ Tập hợp điểm M là **hình tròn** tâm $I(a;b)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

- $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = ay^2 + by + c \end{cases} \xrightarrow{KL}$ Tập hợp điểm M là **đường parabol**.
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{KL}$ Tập hợp điểm M là **đường elip**.

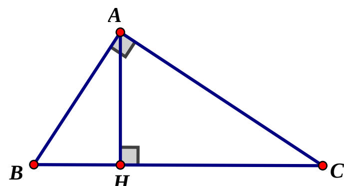
☞Đặc biệt: Nhận biết ngay không cần biến đổi.

- $|z - (a + bi)| = m > 0 \xrightarrow{KL}$ Tập hợp điểm M là **đường tròn** có tâm $I(a;b)$, bán kính $R = m$.
- $|z - (a_1 + b_1 i)| = |z - (a_2 + b_2 i)| \Leftrightarrow \underbrace{MA = MB}_{A(a_1;b_1),\, B(a_2;b_2)} \xrightarrow{KL}$ Tập hợp điểm M là **đường trung trực** đoạn thẳng AB.
- $|z - (a_1 + b_1 i)| + |z - (a_2 + b_2 i)| = \underset{>0}{2a} \Leftrightarrow \underbrace{\underbrace{MF_1 + MF_2}_{F_1(a_1;b_1),\, F_2(a_2;b_2)} = \underset{>0}{2a}}_{F_1F_2 < 2a} \xrightarrow{KL}$ Tập hợp điểm M là **đường elip** với hai tiêu điểm F_1, F_2.

XII. KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

A – MỘT SỐ HÌNH PHẲNG CƠ BẢN:

1. Tam giác vuông:

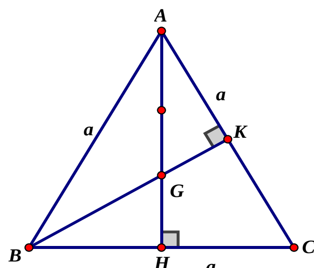


- $AB^2 + AC^2 \overset{Pitago}{=} BC^2$
- $AB^2 = BH.BC$
- $AC^2 = CH.BC$
- $AH^2 = BH.CH$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \boxed{AH = \frac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}AH.BC$

- $\sin B = \frac{AC}{BC}$ (đối/huyền)
- $\cos B = \frac{AB}{BC}$ (kề/huyền)
- $\tan B = \frac{AC}{AB}$ (đối/kề)
- $\cot B = \frac{AB}{AC}$ (kề/đối)

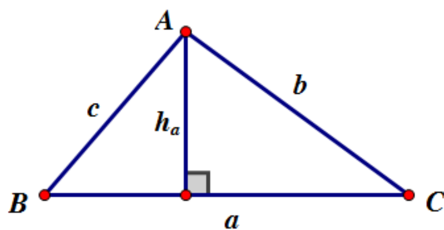
2. Tam giác đều:



Giả sử tam giác ABC đều có cạnh a; trọng tâm G; các đường cao (trùng với trung tuyến) gồm AH, BK.

- Đường cao: $AH = BK = \frac{(cạnh) \times \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- $AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $GH = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.
- Diện tích: $S_{\Delta ABC} = \frac{(cạnh)^2 \times \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

3. Tam giác thường:



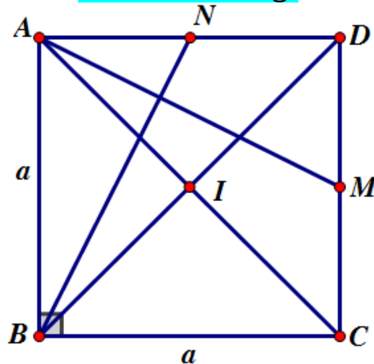
Giả sử tam giác ABC có $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$; các đường cao h_a, h_b, h_c lần lượt ứng với cạnh a, b, c. Ký hiệu R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp Δ.

- Định lí Sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.
- Định lí Cô-sin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$;
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$.

- Diện tích: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}h_a.a = \frac{1}{2}h_b.b = \frac{1}{2}h_c.c$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{2}ac.\sin B = \frac{1}{2}bc.\sin A$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} = pr$; $\underbrace{S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-b)}}_{Công\ thức\ Hê-Rông}$ với $p = \frac{a+b+c}{2}$ (nửa chu vi).

4. Hình vuông:



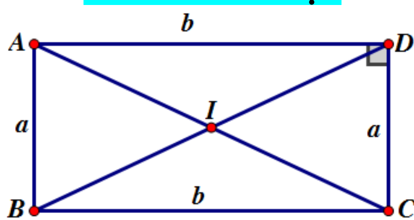
Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a; hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của CD, AD; I là tâm hình vuông.

- Đường chéo: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC = BD = (cạnh) \times \sqrt{2} = a\sqrt{2} \end{cases}$.

$IA = IB = IC = ID = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông.

- Diện tích: $S_{ABCD} = (cạnh)^2 = a^2$; chu vi: $p = 4a$.
- Vì $\Delta ABN = \Delta ADM$, ta chứng minh được: $AM \perp BN$.

5. Hình chữ nhật:



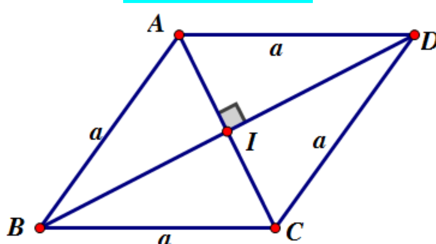
Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm I có $AB = a$, $AD = b$.

- Đường chéo: $AC = BD = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$IA = IB = IC = ID = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ nên I là tâm đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D.

- Diện tích: $S_{ABCD} = a.b$; chu vi: $p = 2(a+b)$.

6. Hình thoi:



Cho hình thoi $ABCD$ có tâm I, cạnh bằng a.

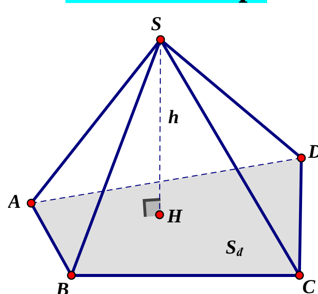
- Đường chéo: $AC \perp BD$; $AC = 2AI = 2AB.\sin\widehat{ABI} = 2a.\sin\widehat{ABI}$.
- Diện tích: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD$; $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ACD} = 2S_{\Delta ABD}$.

Đặc biệt: Nếu hình thoi có góc $\widehat{B} = \widehat{D} = 60^0$ ($\widehat{A} = \widehat{C} = 120^0$) thì ta chia hình thoi ra làm hai tam giác đều: $\Delta ABC = \Delta ACD$; $AC = a$ và

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

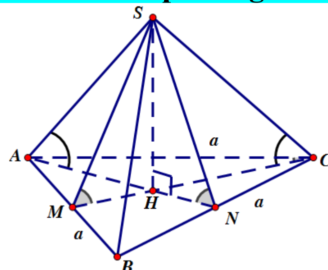
B – THỂ TÍCH KHỐI CHÓP:

7. Hình chóp:



$V = \frac{1}{3}h.S_đ$

7.1. Hình chóp tam giác đều



- Tất cả cạnh bên bằng nhau.
- Đáy là tam giác đều cạnh a.
- $SH \perp (ABC)$ với H là trọng tâm (cũng là trực tam) $\Delta\ ABC$.
- $\begin{cases} S_đ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ SH = h \end{cases} \xrightarrow{Thể\ tích} V = \frac{1}{3}h.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

☆**Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:** $\left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = \widehat{SAH}$

$= \left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = \widehat{SCH}$.

☆**Góc giữa mặt bên và mặt đáy:**

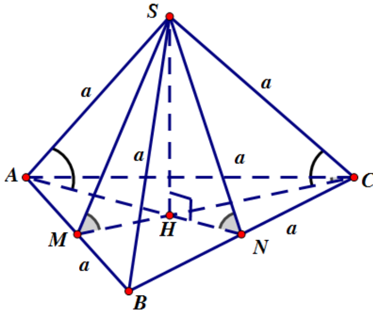
$\left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right) = \widehat{SMH}$

$= \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{SNH}$.

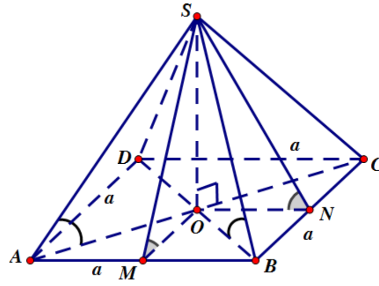
7.2. Tứ diện đều:

- Đây cũng là hình chóp tam giác đều, đặc biệt là cạnh bên bằng cạnh đáy. Thể tích:

$$\boxed{V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}.$$



7.3. Hình chóp tứ giác đều:

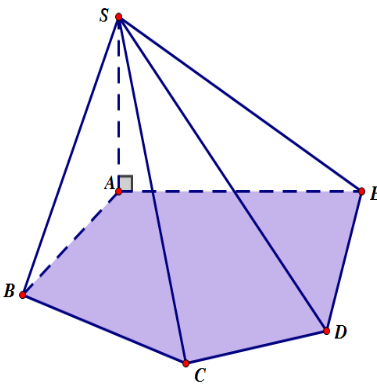


- Tất cả cạnh bên bằng nhau.
- Đáy là hình vuông cạnh a.
- $SO\perp(ABCD)$ với O là tâm hình vuông $ABCD$.
- $\begin{cases}S_đ=a^2\\SO=h\end{cases}\xrightarrow{\text{Thể tích}}\boxed{V=\frac{1}{3}h.a^2}.$

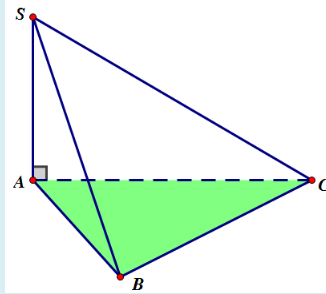
☆**Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:** $\left(\widehat{SA,(ABCD)}\right)=\widehat{SAO}$ $=\left(\widehat{SB,(ABCD)}\right)=\widehat{SBO}$.

☆**Góc giữa mặt bên và mặt đáy:** $\left(\widehat{(SAB),(ABCD)}\right)=\widehat{SMO}$ $=\left(\widehat{(SBC),(ABCD)}\right)=\widehat{SNO}$.

7.4. Hình chóp có cạnh bên *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy.

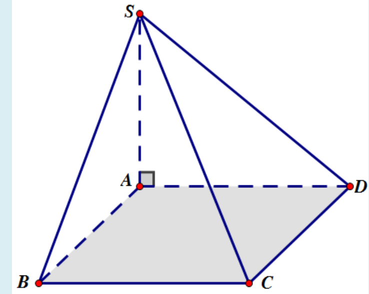


Đáy là tam giác



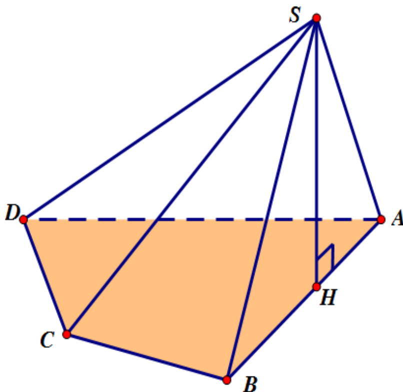
- $\begin{cases}h=SA\\S_đ=S_{\Delta ABC}\end{cases}\xrightarrow{\text{Thể tích}}V=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}$
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy: $\begin{cases}\left(\widehat{SB,(ABC)}\right)=\widehat{SBA}\\\left(\widehat{SC,(ABC)}\right)=\widehat{SCA}\end{cases}.$

Đáy là tứ giác đặc biệt

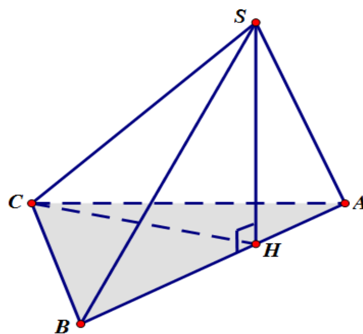


- $\begin{cases}h=SA\\S_đ=S_{ABCD}\end{cases}\xrightarrow{\text{Thể tích}}V=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}.$
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy: $\begin{cases}\left(\widehat{SB,(ABCD)}\right)=\widehat{SBA}\\\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right)=\widehat{SCA}\end{cases}.$

7.5. Hình chóp có mặt bên *(SAB)* vuông góc với mặt phẳng đáy.

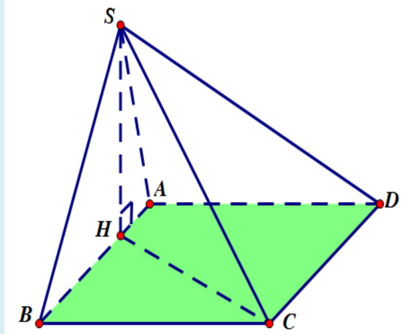


Đáy là tam giác



- Đường cao $h=SH$ cũng là đường cao của ΔSAB.
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy: $\begin{cases}\left(\widehat{SA,(ABC)}\right)=\widehat{SAH}\\\left(\widehat{SC,(ABC)}\right)=\widehat{SCH}\end{cases}.$

Đáy là tứ giác đặc biệt

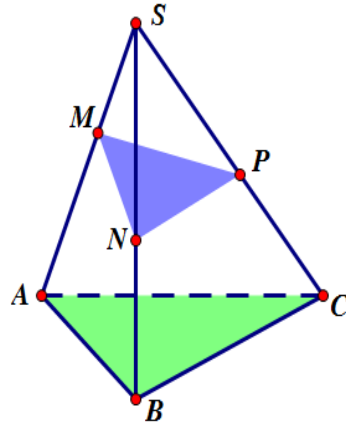


- Đường cao $h=SH$ cũng là đường cao của ΔSAB.
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy: $\begin{cases}\left(\widehat{SA,(ABCD)}\right)=\widehat{SAH}\\\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right)=\widehat{SCH}\end{cases}.$

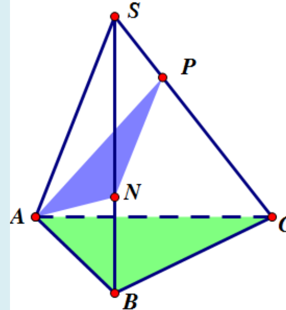
C – TỈ SỐ THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Cho hình chóp có đáy là tam giác ABC. Các điểm M, N, P nằm trên cạnh SA, SB, SC. Ta có:

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}.$$

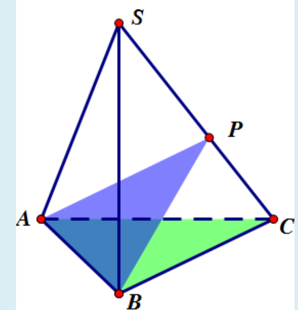


Đặc biệt: $M\equiv A$

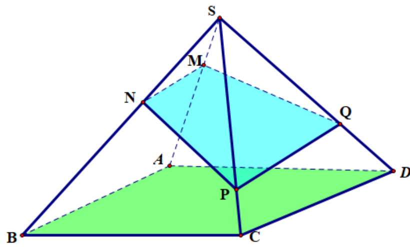


$$\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}$$

Đặc biệt $M\equiv A,\ N\equiv B$



$$\frac{V_{S.ABP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SP}{SC}$$



Hình chóp có đáy là hình bình hành với $\frac{SM}{SA}=x,\ \frac{SN}{SB}=y,\ \frac{SP}{SC}=z,\ \frac{SQ}{SD}=t$.

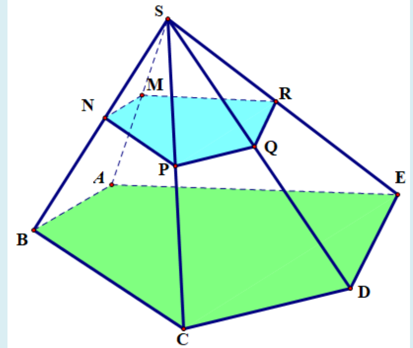
Khi đó:

$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\frac{xyz+xyt+xzt+yzt}{4}$$ và $$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{y}+\frac{1}{t}.$$

Hình chóp có đáy là đa giác bất kỳ. Chẳng hạn: (MNPQR) || (ABCDE)

và tỉ số: $x=\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}=\frac{SP}{SC}=\frac{SQ}{SD}=\frac{SR}{SE}$

Khi đó: $$\frac{V_{S.MNPQR}}{V_{S.ABCDE}}=x^3$$

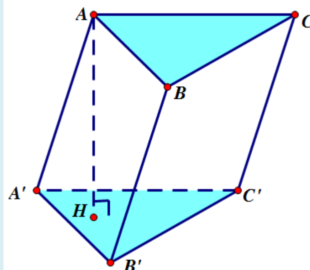


D – THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ:

1. Hình lăng trụ thường:

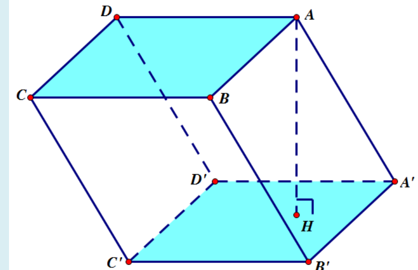
- Hai đáy là hai hình giống nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song.
- Các cạnh bên song song và bằng nhau. Các mặt bên là các hình bình hành.
- Thể tích: $V=h.S_đ$.

Đáy là tam giác



$$V=AH.S_{\Delta ABC}=AH.S_{\Delta A'B'C'}$$

Đáy là tứ giác



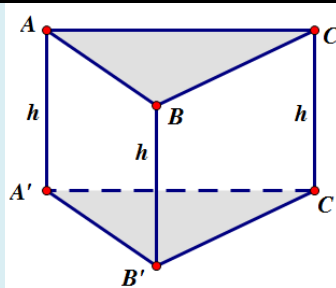
$$V=AH.S_{ABCD}=AH.S_{A'B'C'D'}$$

2. Hình lăng trụ đứng:

- Các cạnh bên cùng vuông góc với hai mặt đáy nên mỗi cạnh bên cũng là đường cao của lăng trụ.

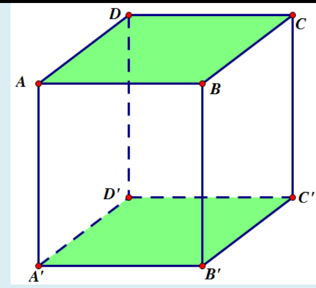
☞ **Lăng trụ tam giác đều:** Là **lăng trụ đứng** và có hai đáy là hai **tam giác đều** bằng nhau.

Đáy là tam giác



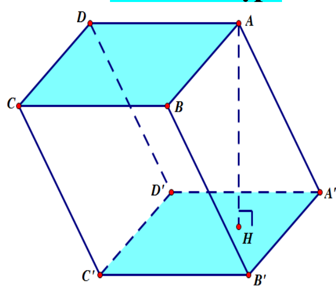
- Thể tích: $V=h.S_đ$ với $h=AA'=BB'=CC'$.

Đáy là tứ giác



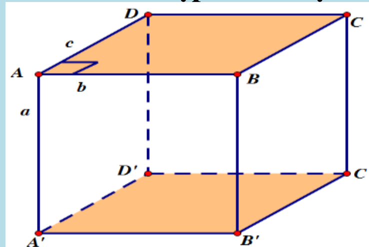
- Thể tích: $V=h.S_đ$ với $h=AA'=BB'=CC'=DD'$.

3. Hình hộp:



- Là lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.
- Thể tích: $\boxed{V = h.S_{đ}}$.

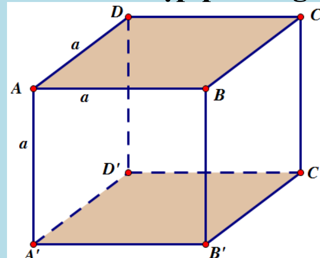
3.1 Hình hộp chữ nhật:



- Là lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.

$\boxed{V = abc}$ với a, b, c là ba kích thước của hình hộp chữ nhật.

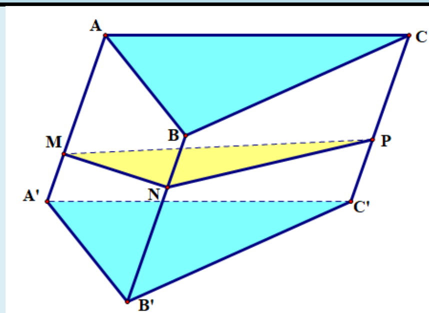
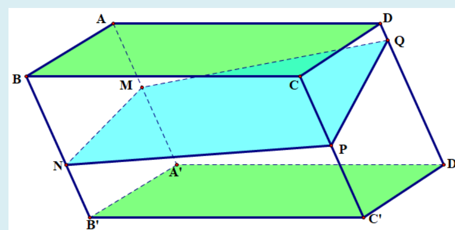
3.2. Hình lập phương:



- Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

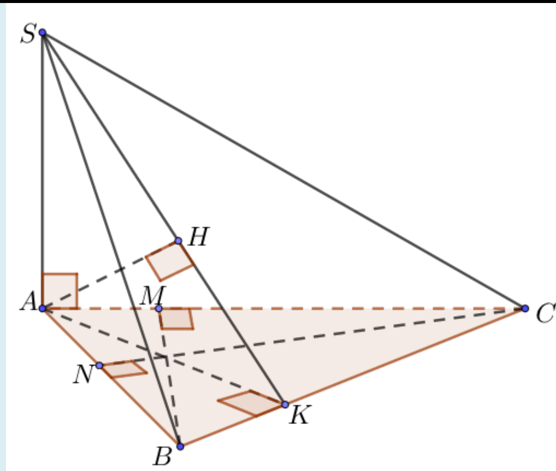
$\boxed{V = a^3}$ với a là cạnh của hình lập phương.

4. Tỉ số thể tích đối với lăng trụ:

Lăng trụ có đáy tam giác	Lăng trụ đáy là hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông (Lăng trụ này chính là hình hộp thường hoặc hình hộp chữ nhật, hình lập phương)
$x = \dfrac{AM}{AA'}, \; y = \dfrac{BN}{BB'}, \; z = \dfrac{CP}{CC'}$	$x = \dfrac{AM}{AA'}, \; y = \dfrac{BN}{BB'}, \; z = \dfrac{CP}{CC'}, \; t = \dfrac{DQ}{DD'}$
	
Ta có: $\boxed{\dfrac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{x+y+z}{3}}$	Ta có: $\boxed{\dfrac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \dfrac{x+y+z+t}{4}}$ và $\boxed{x+z = y+t}$

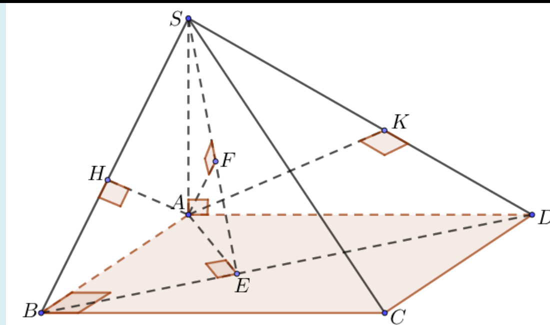
E – BÀI TOÁN KHOẢNG CÁCH

1. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy là tam giác



- $d\left(A,(SBC)\right) = AH = \dfrac{SA.AK}{\sqrt{SA^2 + AK^2}}$.

2. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy là hình vuông, hình chữ nhật

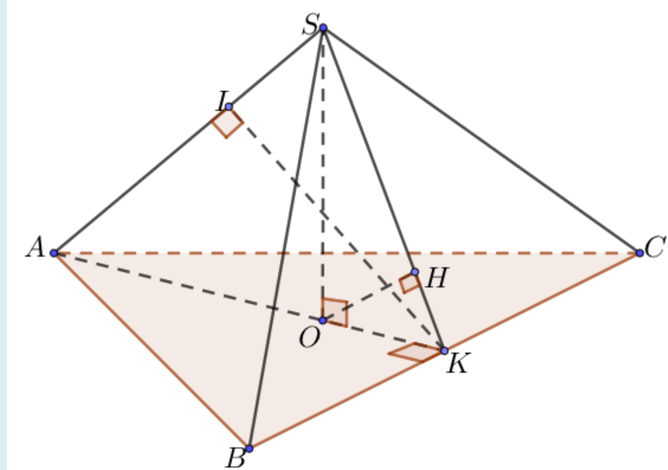


- $d\left(A,(SBC)\right) = AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = d\left(D,(SBC)\right)$.
- $d\left(A,(SCD)\right) = AK = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = d\left(B,(SCD)\right)$.

- $d\left(B,\left(SAC\right)\right)=BM$; $d\left(C,\left(SAB\right)\right)=CN$.
- $d\left(SA,BC\right)=AK$.

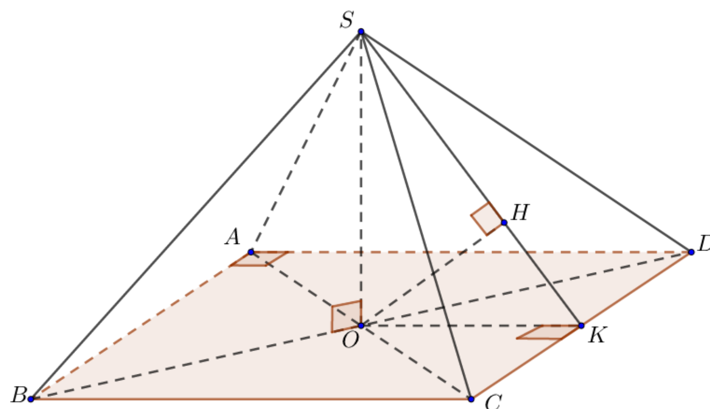
- $d\left(A,\left(SBD\right)\right)=AF=\dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=d\left(C,\left(SBD\right)\right)$.
- $d\left(AD,SB\right)=AH$; $d\left(AB,SD\right)=AK$.
- $d\left(AD,SC\right)=d\left(AD,\left(SBC\right)\right)=d\left(A,\left(SBC\right)\right)=AH$.
- $d\left(AB,SC\right)=d\left(AB,\left(SCD\right)\right)=d\left(A,\left(SCD\right)\right)=AK$.

3. Hình chóp tam giác đều



- $d\left(O,\left(SBC\right)\right)=OH=\dfrac{SO.OK}{\sqrt{SO^2+OK^2}}$
  $=d\left(O,\left(SAB\right)\right)=d\left(O,\left(SAC\right)\right)$.
- $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=3d\left(O,\left(SBC\right)\right)=3OH$
  $=d\left(B,\left(SAC\right)\right)=d\left(C,\left(SAB\right)\right)$.
- $d\left(SA,BC\right)=IK=d\left(SB,AC\right)=d\left(SC,AB\right)$.

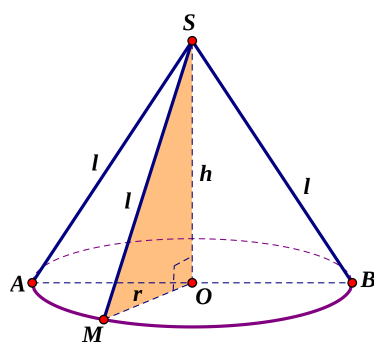
4. Hình chóp tứ giác đều



- $d\left(O,\left(SCD\right)\right)=OH=\dfrac{SO.OK}{\sqrt{SO^2+OK^2}}$
  $=d\left(O,\left(SAB\right)\right)=d\left(O,\left(SBC\right)\right)=d\left(O,\left(SAD\right)\right)$.
- $d\left(A,\left(SCD\right)\right)=2d\left(O,\left(SCD\right)\right)=2OH=d\left(A,\left(SBC\right)\right)$
  $=d\left(B,\left(SAD\right)\right)=d\left(B,\left(SCD\right)\right)=\ldots$
- $d\left(AB,SC\right)=d\left(AB,\left(SCD\right)\right)=d\left(A,\left(SCD\right)\right)=2OH$
  $=d\left(AB,SD\right)=d\left(AD,SB\right)=d\left(AD,SC\right)=\ldots$

F – MẶT TRỤ, MẶT NÓN – MẶT CẦU

MẶT NÓN



☞**Hình thành:** Quay Δ vuông SOM quanh trục SO, ta được mặt nón như hình bên với:
$\begin{cases} h=SO \\ r=OM \end{cases}$.

Các yếu tố mặt nón:

- **Đường cao**: $\boxed{h=SO}$. (SO cũng được gọi là **trục** của hình nón).
- **Bán kính đáy**: $\boxed{r=OA=OB=OM}$.
- **Đường sinh**: $\boxed{l=SA=SB=SM}$.
- **Góc ở đỉnh**: $\boxed{\widehat{ASB}}$.
- **Thiết diện qua trục**: ΔSAB cân tại S.
- **Góc giữa đường sinh và mặt đáy**: $\boxed{\widehat{SAO}=\widehat{SBO}=\widehat{SMO}}$.

Một số công thức:

- **Chu vi đáy**: $\boxed{p=2\pi r}$.
- **Diện tích đáy**: $\boxed{S_{đ}=\pi r^2}$.
- **Thể tích**: $\boxed{V=\dfrac{1}{3}h.S_{đ}=\dfrac{1}{3}h.\pi r^2}$.
  (liên tưởng đến thể tích khối chóp).
- **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq}=\pi rl}$.
- **Diện tích toàn phần**:
  $\boxed{S_{tp}=S_{xq}+S_{đ}=\pi rl+\pi r^2}$.

MẶT TRỤ	Các yếu tố mặt trụ:	Một số công thức:
☞**Hình thành:** Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường trung bình OO', ta có mặt trụ như hình bên.	▪ **Đường cao**: $h = OO'$. ▪ **Đường sinh**: $l = AD = BC$. Ta có: $l = h$. ▪ **Bán kính đáy**: $r = OA = OB = O'C = O'D$. ▪ **Trục** (Δ) là đường thẳng đi qua hai điểm O, O'. ▪ **Thiết diện qua trục**: Là hình chữ nhật $ABCD$.	▪ **Chu vi đáy**: $p = 2\pi r$. ▪ **Diện tích đáy**: $S_đ = \pi r^2$. ▪ **Thể tích khối trụ**: $V = h.S_đ = h.\pi r^2$. ▪ **Diện tích xung quanh**: $S_{xq} = 2\pi r.h$. ▪ **Diện tích toàn phần**: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_đ = 2\pi r.h + 2\pi r^2$.

MẶT CẦU	Một số công thức:	Mặt cầu ngoại tiếp đa diện / Mặt cầu nội tiếp đa diện
☞**Hình thành:** Quay đường tròn tâm I, bán kính $R = \frac{AB}{2}$ quanh trục AB, ta có mặt cầu như hình vẽ.	▪ **Tâm** I, **bán kính** $R = IA = IB = IM$. ▪ **Đường kính** $AB = 2R$. ▪ **Thiết diện qua tâm** mặt cầu: Là đường tròn tâm I, bán kính R. ▪ **Diện tích** mặt cầu: $S = 4\pi R^2$. ▪ **Thể tích** khối cầu: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.	**Mặt cầu ngoại tiếp đa diện** là mặt cầu đi qua tất cả đỉnh của đa diện đó. **Mặt cầu nội tiếp đa diện** là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của đa diện đó.

CÁCH TÌM BÁN KÍNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP THƯỜNG GẶP

1. Hình chóp có các đỉnh nhìn một cạnh dưới một góc vuông.		2. Hình chóp đều.	
▪ Xét hình chóp có $SA \perp (ABC)$ và $\widehat{ABC} = 90^0$. ▪ Ta có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90^0$ nên mặt cầu ngoại tiếp	▪ Xét hình chóp có $SA \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật hoặc hình vuông. ▪ Ta có: $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^0$	▪ Xét hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b và đường cao $SH = h$. ▪ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên là	▪ Xét hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng b và chiều cao $SO = h$. ▪ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên là $R = \frac{b^2}{2h}$.

hình chóp có tâm I là trung điểm SC, bán kính $R=\dfrac{SC}{2}$.	Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I là trung điểm SC, bán kính $R=\dfrac{SC}{2}$.	$R=\dfrac{b^2}{2h}$.	

3. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy.

- Xét hình chóp có $SA\perp$ (đáy) và $SA=h$; bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là r_d.
- Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có bán kính $R=\sqrt{\left(\dfrac{h}{2}\right)^2+r_d^{\,2}}$.
- Nếu đáy là tam giác đều cạnh a thì $r_d=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Nếu đáy là hình vuông cạnh a thì $r_d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Nếu đáy là hình chữ nhật cạnh a,b thì $r_d=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

4. Hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy.

- Xét hình chóp có mặt bên $(SAB)\perp$ (đáy), bán kính ngoại tiếp đáy là r_d, bán kính ngoại tiếp ΔSAB là r_b, $d=AB=(SAB)\cap$ (đáy). (đoạn giao tuyến)
- Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R=\sqrt{r_d^{\,2}+r_b^{\,2}-\dfrac{d^2}{4}}$.

XIII. HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

1. Hệ trục tọa độ *Oxyz*:

- Hệ trục gồm ba trục $Ox,\ Oy,\ Oz$ đôi một vuông góc nhau.
- Trục Ox: **trục hoành**, có vectơ đơn vị $\vec{i}=(1;0;0)$.
- Trục Oy: **trục tung**, có vectơ đơn vị $\vec{j}=(0;1;0)$.
- Trục Oz: **trục cao**, có vectơ đơn vị $\vec{k}=(0;0;1)$.
- Điểm $O(0;0;0)$ là **gốc tọa độ**.

2. Tọa độ vectơ: Vectơ $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\Leftrightarrow\vec{u}=(x;y;z)$.

Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\ \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Ta có:

- $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;\ a_2\pm b_2;\ a_3\pm b_3)$
- $k\vec{a}=(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$
- $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}\ \ (k\in R)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3},\ \ (b_1,b_2,b_3\neq0).$
- $\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3$
- $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_2^2}$
- $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$

- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

3. Tọa độ điểm: $M(x;\ y;\ z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$. Cho $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, ta có:

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC: $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}; \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

QUY TẮC CHIẾU ĐẶC BIỆT

Chiếu điểm trên trục tọa độ

- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên x)}]{\text{Chiếu vào Ox}} M_1(x_M; 0; 0)$
- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên y)}]{\text{Chiếu vào Oy}} M_2(0; y_M; 0)$
- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên z)}]{\text{Chiếu vào Oz}} M_3(0; 0; z_M)$

Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ

- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên x, y)}]{\text{Chiếu vào Oxy}} M_1(x_M; y_M; 0)$
- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên y, z)}]{\text{Chiếu vào Oyz}} M_2(0; y_M; z_M)$
- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên x, z)}]{\text{Chiếu vào Oxz}} M_3(x_M; 0; z_M)$

Đối xứng điểm qua trục tọa độ

- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên x; đổi dấu y, z)}]{\text{Đối xứng qua Ox}} M_1(x_M; -y_M; -z_M)$
- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên y; đổi dấu x, z)}]{\text{Đối xứng qua Oy}} M_2(-x_M; y_M; -z_M)$
- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên z; đổi dấu x, y)}]{\text{Đối xứng qua Oz}} M_3(-x_M; -y_M; z_M)$

Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ

- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên x, y; đổi dấu z)}]{\text{Đối xứng qua Oxy}} M_1(x_M; y_M; -z_M)$
- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên x, z; đổi dấu y)}]{\text{Đối xứng qua Oxz}} M_2(x_M; -y_M; z_M)$
- $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên y, z; đổi dấu x)}]{\text{Đối xứng qua Oyz}} M_3(-x_M; y_M; z_M)$

4. Tích có hướng của hai vectơ:

☞ **Định nghĩa:** Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) = \left(a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1\right).$$

☞ **Tính chất:**	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$	$\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

- Điều kiện **cùng phương** của hai vectơ $\vec{a}$ & $\vec{b}$ là $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$ với $\vec{0} = (0; 0; 0)$.
- Điều kiện **đồng phẳng** của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0$.
- **Diện tích hình bình hành** $ABCD$: $S_{\square ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$.
- **Diện tích tam giác** ABC: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$.
- **Thể tích khối hộp**: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$.
- **Thể tích tứ diện:** $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

5. Phương trình mặt cầu:

Dạng 1: $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ $\xrightarrow{\text{Mặt cầu (S) có}} \begin{cases} \text{tâm } I(a;b;c) \\ R = \sqrt{R^2} \end{cases}$

Dạng 2: $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ $\xrightarrow{\text{Mặt cầu (S) có}} \begin{cases} \text{tâm } I(a;b;c) \\ R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \end{cases}$

☞ Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow$ $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Bài toán 5.1. Viết phương trình mặt cầu tâm I và đi qua

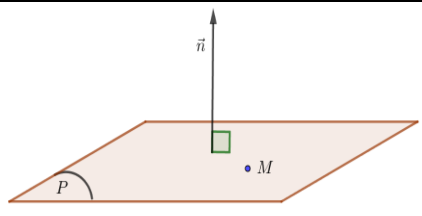
Bài toán 5.2. Viết phương trình mặt cầu có đường kính AB.

điểm M.

- **Bước 1:** Tính bán kính $R = IM$.
- **Bước 2:** Viết phương trình mặt cầu **dạng 1**.

- **Bước 1:** Tìm tâm *I* là trung điểm *AB*. Bán kính $R = \frac{AB}{2} = IA = IB$.
- **Bước 2:** Viết phương trình mặt cầu **dạng 1**.

6. Phương trình mặt phẳng:



✍ **Lưu ý:** Vectơ pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng là vectơ khác $\vec{0}$ nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đó.

- Mặt phẳng $(P)\begin{cases} \text{qua } M(x_0;y_0;z_0) \\ VTPT\ \vec{n}=(a;b;c) \end{cases}$ thì phương trình

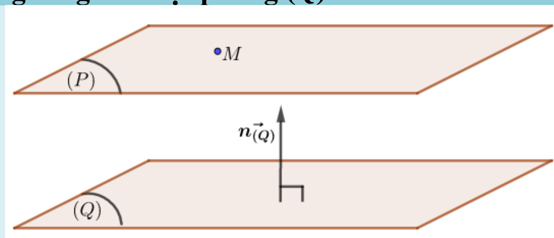
$(P): \boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$ (*)

- Ngược lại, một mặt phẳng bất kỳ đều có phương trình dạng $ax+by+cz+d=0$, mặt phẳng này có $VTPT\ \vec{n}=(a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2>0$.

☞ **Đặc biệt:**

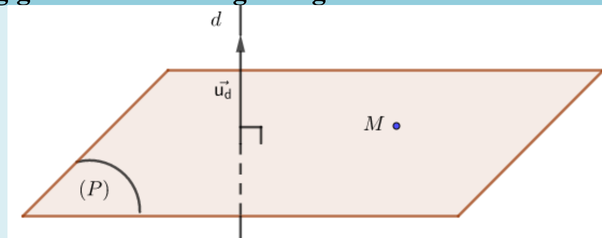
$Mp(Oyz): x=0 \xrightarrow{VTPT} \overrightarrow{n_{(Oyz)}}=(1;0;0)$, $mp(Oxz): y=0 \xrightarrow{VTPT} \overrightarrow{n_{(Oxz)}}=(0;1;0)$, $mp(Oxy): z=0 \xrightarrow{VTPT} \overrightarrow{n_{(Oxy)}}=(0;0;1)$

Bài toán 6.1. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) qua *M* và song song với mặt phẳng (*Q*) cho trước.



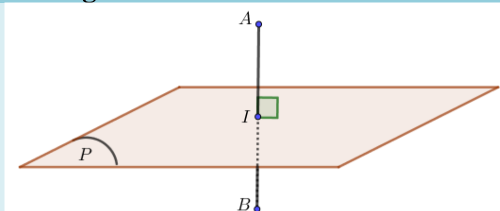
- Mặt phẳng (P) qua *M*, có VTPT là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\overrightarrow{n_{(Q)}}$ nên phương trình được viết theo (*).

Bài toán 6.2. Viết phương trình mặt phẳng (*P*) qua *M* và vuông góc với với đường thẳng *d* cho trước.



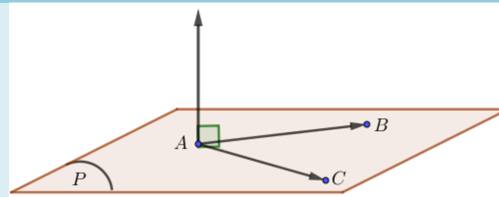
- Mặt phẳng (*P*) qua *M* , có VTPT $\overrightarrow{n_{(P)}}=\overrightarrow{u_d}$ nên phương trình được viết theo (*).

Bài toán 6.3. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB*.



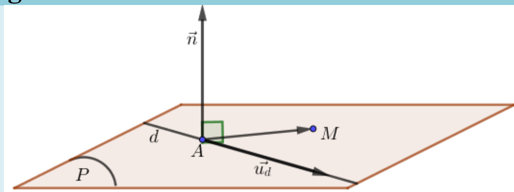
- **Bước 1:** Tìm trung điểm *I* của đoạn *AB* và tính $\overrightarrow{AB}$.
- **Bước 2:** Phương trình $mp(P)\begin{cases} \text{qua } I \\ \text{VTPT } \vec{n}=\overrightarrow{AB} \end{cases}$.

Bài toán 6.4. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm *A, B, C*.



- **Bước 1:** Tính tọa độ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và suy ra $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.
- **Bước 2:** Phương trình $mp(P)\begin{cases} \text{qua } A \\ \text{VTPT } \vec{n}=\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \end{cases}$.

Bài toán 6.5. Viết phương trình mặt phẳng qua *M* và chứa đường thẳng *d* với $M \notin d$.

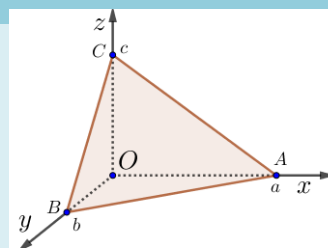


- **Bước 1:** Chọn điểm $A \in d$ và một VTCP $\overrightarrow{u_d}$. Tính $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_d}\right]$.

Bài toán 6.6. Viết phương trình mặt phẳng cắt *Ox, Oy, Oz* lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a.b.c \neq 0$.

- Phương trình mặt phẳng được viết theo đoạn chắn

$(P): \boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$.



- **Bước 2:** Phương trình $mp(P)\begin{cases}\text{qua } M\\ \text{VTPT } \vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u_d}\right]\end{cases}$

Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

- Cho $\begin{cases}M(x_0;y_0;z_0)\\ mp(P): ax+by+cz+d=0\end{cases}$.
- Khi đó: $\boxed{d\left(M,(P)\right)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

- Cho hai mặt phẳng $\begin{cases}(P): ax+by+cz+d_1=0\\ (Q): ax+by+cz+d_2=0\end{cases}$.
- Khi đó: $\boxed{d\left((P),(Q)\right)=\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$ với $d_1\neq d_2$.

Góc giữa hai mặt phẳng

- Cho hai mặt phẳng (P), (Q) có phương trình:
  $\begin{cases}(P): a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ (Q): a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$.
- Góc giữa $(P)\&(Q)$ được tính:

$$\boxed{\cos\left((P),(Q)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}}$$

☞ **Chú ý:** $0^0\leq\left(\widehat{(P),(Q)}\right)\leq 90^0$.

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (P), (Q) có phương trình:
$\begin{cases}(P): a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ (Q): a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$. Ta có:

- $(P)\,||\,(Q)\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}\neq\dfrac{d_1}{d_2}$.
- $(P)\equiv(Q)\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{d_1}{d_2}$.
- $(P)\&(Q)$ cắt nhau $\Leftrightarrow a_1:b_1:c_1\neq a_2:b_2:c_2$.
- $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

☞ **Lưu ý:** ***Các tỉ số trên có nghĩa khi mẫu khác 0.***

Ví trị tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ và mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R.

- **Trường hợp 1:** $\boxed{d\left(I,(P)\right)>R}\Leftrightarrow (P)$ và (S) **không có điểm chung.**
- **Trường hợp 2:** $\boxed{d\left(I,(P)\right)=R}\Leftrightarrow (P)$ và (S) có **một điểm chung**. Khi đó ta nói (P) **tiếp xúc** (S) hoặc (P) là **tiếp diện** của (S).

Ta có: $IM\perp(P)$ với M là tiếp điểm.

- **Trường hợp 3:** $\boxed{d\left(I,(P)\right)<R}\Leftrightarrow (P)$ cắt (S) theo **giao tuyến là một đường tròn**.

Đường tròn giao tuyến có tâm H (là trung điểm AB), bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$ với $IH=d\left(I,(P)\right)$.

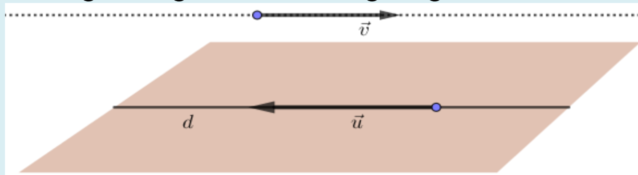
7. Phương trình đường thẳng:

☞ Đường thẳng $d\begin{cases}\text{qua } A(x_A;y_A;z_A)\\ \text{VTCP } \vec{u}=(u_1;u_2;u_3)\end{cases}$

- Phương trình tham số $d:\boxed{\begin{cases}x=x_A+u_1t\\ y=y_A+u_2t\\ z=z_A+u_3t\end{cases}}$ với t là tham số.

☞ Vectơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng d là vectơ khác

$\vec{0}$, có giá trùng với d hoặc song song với d.



- Phương trình chính tắc $d: \dfrac{x-x_A}{u_1}=\dfrac{y-y_A}{u_2}=\dfrac{z-z_A}{u_3}$ với $u_1.u_2.u_3 \neq 0$.

✍ **Lưu ý:** Nếu có cặp vectơ khác $\vec{0}$ không cùng phương sao cho $\begin{cases}\vec{a}\perp d\\ \vec{b}\perp d\end{cases}$ thì d có VTCP là: $\overrightarrow{u_d}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

7.1. Ví trị tương đối giữa hai đường thẳng:

Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng d_1, d_2 với $d_1\begin{cases}\text{qua } M\\ \text{VTCP } \overrightarrow{u_1}\end{cases}$, $d_2\begin{cases}\text{qua } N\\ \text{VTCP } \overrightarrow{u_2}\end{cases}$.

Bước I	Bước II	Kết luận
❖ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=\vec{0} \longrightarrow$ Hai đường thẳng d_1, d_2 **song song** hoặc **trùng nhau**.	❖ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{MN}\right]=\vec{0}$	$\longrightarrow d_1 \equiv d_2$
	❖ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{MN}\right]\neq\vec{0}$	$\longrightarrow d_1 \parallel d_2$
❖ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\neq\vec{0} \longrightarrow$ Hai đường thẳng d_1, d_2 **cắt nhau** hoặc **chéo nhau**.	❖ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN}=0$	$\longrightarrow d_1$ cắt d_2
	❖ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN}\neq 0$	$\longrightarrow d_1$ & d_2 chéo nhau

7.2. Ví trị tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+u_1t\\ y=y_0+u_2t\\ z=z_0+u_3t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$.

Bước I:	Bước II:Giải PT (*), ta gặp 1 trong 3 trường hợp sau	Kết luận
❖ Thay phương trình tham số d vào phương trình (P), ta được PT (*): $a(x_0+u_1t)+b(y_0+u_2t)+c(z_0+u_3t)+d=0$	❖ PT (*) vô nghiệm	$\longrightarrow d \parallel (P)$
	❖ PT (*) có 1 nghiệm $t=t_0$	$\longrightarrow d$ cắt (P) tại một điểm
	❖ PT (*) có vô số nghiệm t.	$\longrightarrow d \subset (P)$

7.3. Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng:

☞ Cho điểm M và đường thẳng d (có phương trình tham số hoặc chính tắc).

- **Bước 1:** Chọn điểm $A\in d$ và một VTCP $\overrightarrow{u_d}$.
- **Bước 2:** $d\left(M,d\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}$.

7.4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng:

Trường hợp 1: **Hai đường thẳng song song d_1, d_2.**

- **Bước 1:** Chọn điểm M (đẹp) thuộc d_1.
- **Bước 2:** $d\left(d_1,d_2\right)=d\left(M,d_2\right)$. **(xem 7.3)**

Trường hợp 2: **Hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2.**

- **Bước 1:** Ghi rõ $d_1\begin{cases}qua\ \ A(...)\\ VTCP\ \ \overrightarrow{u_1}=(...)\end{cases}$, $d_2\begin{cases}qua\ \ B(...)\\ VTCP\ \ \overrightarrow{u_2}=(...)\end{cases}$.
- **Bước 2:** Tính: $d\left(d_1,d_2\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}$.

7.5. Góc giữa hai đường thẳng:	
☞ Cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có VTCP là $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$.	⟶ Ta có: $\cos\left(\widehat{d_1, d_2}\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

7.6. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:	
☞ Cho đường thẳng *d* có VTCP $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}$.	⟶ Ta có: $\sin\left(\widehat{d,(P)}\right) = \dfrac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}$.

8. Hình chiếu và điểm đối xứng:

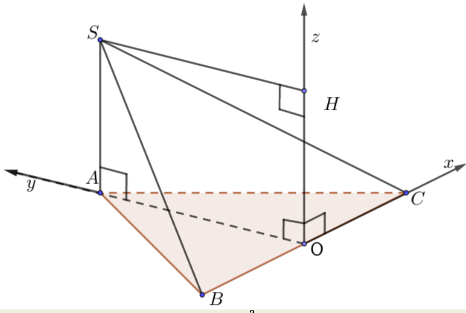
Bài toán		Phương pháp	
8.1. Tìm hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (P).		❖ Gọi *d* là đường thẳng $\begin{cases}\text{qua } A \\ \perp (P)\end{cases}$ ⟶ Viết pt tham số của *d* với VTCP của *d* cũng là VTPT của *(P)*. ❖ Gọi $H = d \cap (P)$. Thay pt tham số của *d* vào pt mp *(P)* ta tìm được tọa độ *H*.	
8.2. Tìm điểm A' đối xứng với A qua (P).		❖ Ta có *H* là trung điểm $AA' \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{cases}$.	
8.3. Tìm hình chiếu của điểm A trên đường thẳng *d*.	**Cách 1**	❖ Gọi $H(theo\ \ t)$ (dựa vào pt tham số của *d*). ❖ $AH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d} = 0$ ⟶ Tìm được $t = ...$ ⟶ Tọa độ *H*.	
	Cách 2	❖ Gọi $(P)\begin{cases}\text{qua } A \\ (P) \perp d\end{cases}$ ⟶ Viết pt mp(P). ❖ Gọi $H = d \cap (P)$. Thay pt tham số của *d* vào pt mp *(P)* ta tìm được tọa độ *H*.	
8.4. Tìm điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng *d*.		❖ Ta có *H* là trung điểm $AA' \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{cases}$.	
8.5. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu của đường thẳng d trên mp(P).	**Trường hợp 1:** *d* song song mp *(P)*.	❖ Lập phương trình mp(Q) biết (Q) chứa *d* và $(Q) \perp (P)$: (Q) qua điểm $A \in d$. (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_P}\right]$. ❖ Lập phương trình d' là giao tuyến hai mp *(P)* và *(Q)*: Chọn hai điểm *M, N* thuộc d' bằng cách thay $x = 0 \xrightarrow{Tìm} y, z$ và thay $y = 0 \xrightarrow{Tìm} x, z$ (đối với hệ hai pt *(P)*, *(Q)*). Viết pt *d* qua *M, N*.	
	Trường hợp 2: *d* cắt mp *(P)* tại một điểm.		

XIV. GẮN TỌA ĐỘ VÀO HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1. Gắn tọa độ đối với hình chóp

1.1. Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy:

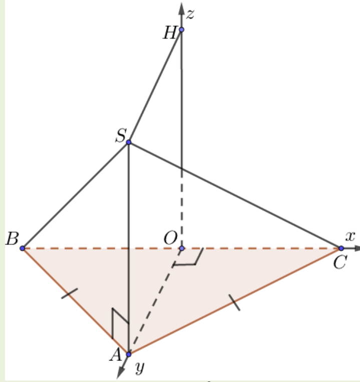
Đáy là tam giác đều



- Gọi O là trung điểm BC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = a = 1$.
- Tọa độ các điểm là:

$O(0;0;0)$, $A\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $S\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

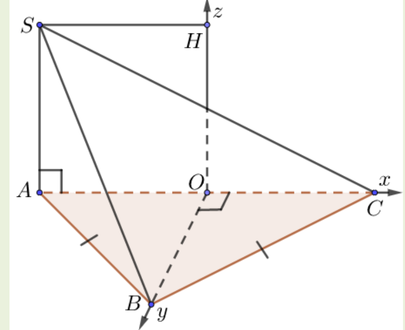
Đáy là tam giác cân tại A



- Gọi O là trung điểm BC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm là:

$O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(-OB;0;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(0;OA;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

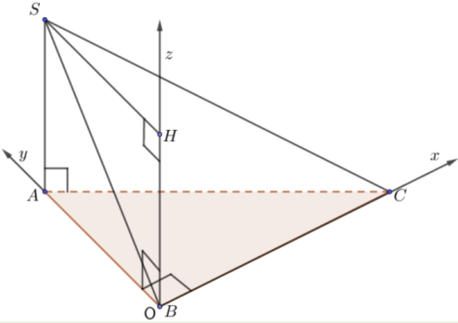
Đáy là tam giác cân tại B



- Gọi O là trung điểm AC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$,

$A(-OA;0;0)$, $B(0,OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

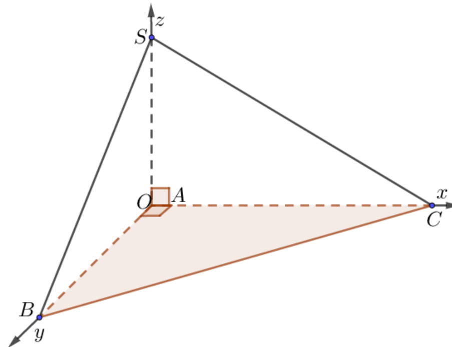
Đáy là tam giác vuông tại B



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $B \equiv O(0;0;0)$,

$A(0;AB;0)$, $C(BC,0;0)$, $S\left(0;AB;\underbrace{BH}_{=SA}\right)$.

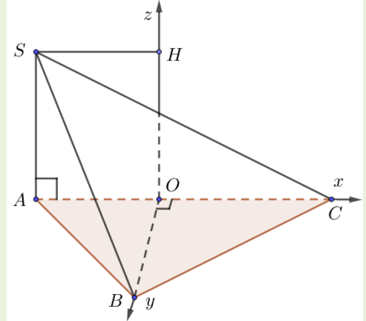
Đáy là tam giác vuông tại A



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $A \equiv O(0;0;0)$,

$B(0;OB;0)$, $C(AC;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

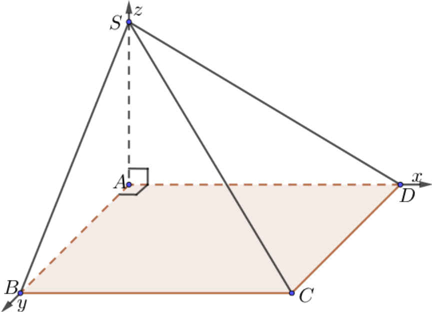
Đáy là tam giác thường



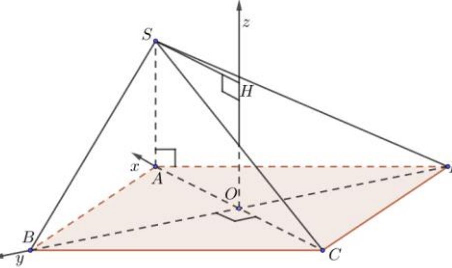
- Dựng đường cao BO của ΔABC. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$,

$A(-OA;0;0)$, $B(0,OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

Đáy là hình vuông, hình chữ nhật

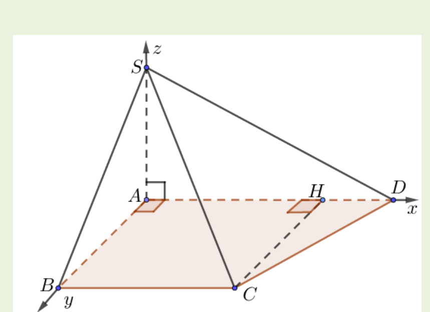


Đáy là hình thoi



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.

Đáy là hình thang vuông



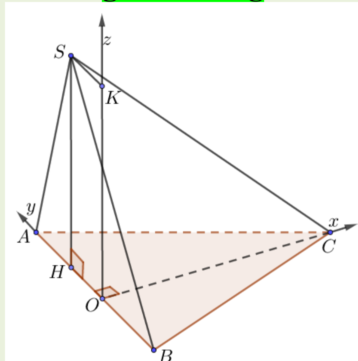
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a=1$.
- Tọa độ $A\equiv O(0;0;0), B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

- Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(-OC;0;0)$ $D(0;-OD;0)$, $S\left(OA;0;\underbrace{OH}_{=SA}\right)$.

- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a=1$.
- Tọa độ $A\equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AH;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

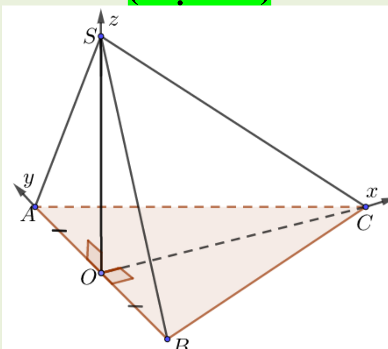
1.2.Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường



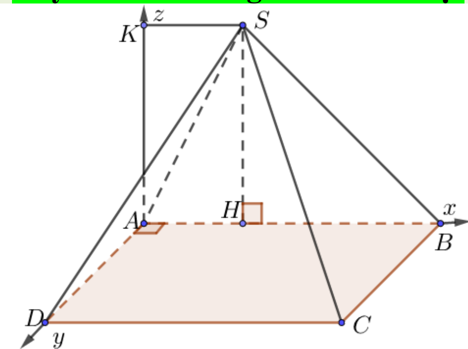
- Vẽ đường cao CO trong ΔABC. Chọn hệ trục như hình, a = 1.
- Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(0;OH;\underbrace{OK}_{=SH}\right)$

Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)



- Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình, a = 1.
- Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S(0;0;SO)$

Đáy là hình vuông-hình chữ nhật



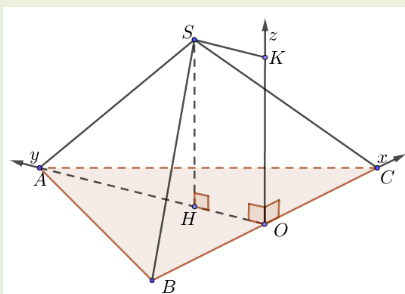
- Dựng hệ trục như hình, chọn a = 1.
- Ta có: $A\equiv O(0;0;0), B(AB;0;0)$ $C(AB;AD;0), D(0;AD;0), S\left(AH;0;\underbrace{AK}_{=SH}\right)$

1.3.Hình chóp đều

Hình chóp tam giác đều

Gọi O là trung điểm một cạnh đáy. Dựng hệ trục như hình vẽ và a = 1. Tọa độ điểm:

$O(0;0;0)$, $A\left(0;\dfrac{AB\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B\left(-\dfrac{BC}{2};0;0\right)$,



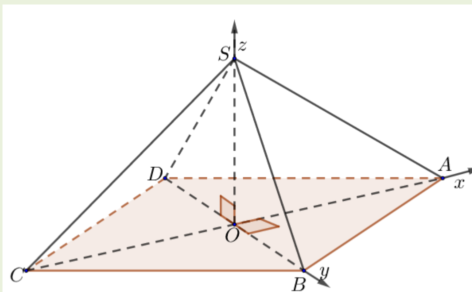
$C\left(\dfrac{BC}{2};0;0\right)$,

$S\left(0;\underbrace{\dfrac{AB\sqrt{3}}{6}}_{=OH};\underbrace{OK}_{=SH}\right)$.

Hình chóp tứ giác đều

Chọn hệ trục như hình với a = 1. Tọa độ điểm: $O(0;0;0)$,

$A\left(\underbrace{\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=OA};0;0\right)$, $B\left(0;\underbrace{\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=OB};0\right)$, $C\left(\underbrace{-\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=-OA};0;0\right)$,



$D\left(0;\underbrace{-\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}}_{=OB};0\right)$

$S(0;0;SO)$.

2. Gắn tọa độ đối với hình lăng trụ

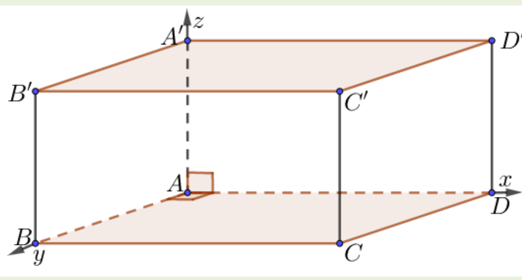
2.1. Lăng trụ đứng

Hình lập phương, hình hộp chữ nhật

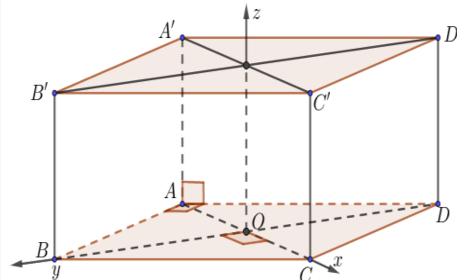
Dựng hệ trục như hình vẽ với a = 1. Tọa độ điểm:

Lăng trụ đứng đáy là hình thoi

Gọi O là tâm hình thoi đáy, ta dựng hệ trục như hình với

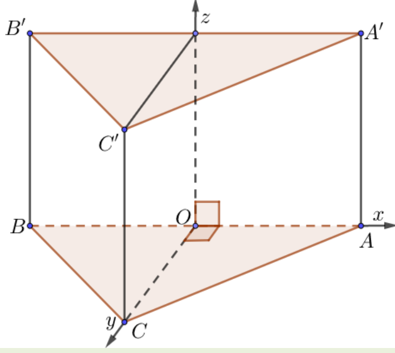


$A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$, $C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $A'(0;0;AA')$, $B'(0;AB;AA')$, $C'(AD;AB;AA')$, $D'(AD;0;AA')$.



$O(0;0;0)$, $A(-OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $D(0;-OD;0)$, $A'(-OA;0;AA')$, $B'(0;OB;AA')$, $C'(OC;0;CC')$, $D'(0;-OD;DD')$

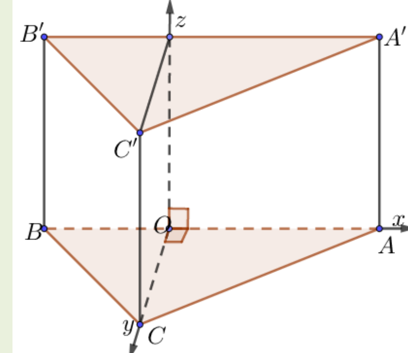
Lăng trụ tam giác đều



Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ với *a* = 1. Ta có:

$O(0;0;0)$, $A\left(\frac{AB}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{AB}{2};0;0\right)$, $C(0;OC;0)$, $A'(OA;0;AA')$, $B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right)$, $C'(0;OC;CC')$.

Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường

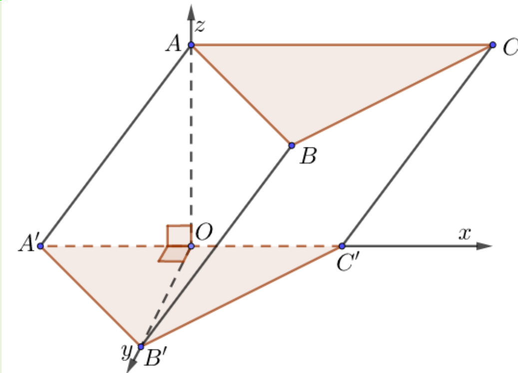


Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC và chọn hệ trục như hình vẽ với *a* = 1. Tọa độ điểm là:

$O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$, $B(-OB;0;0)$, $C(0;OC;0)$, $A'(OA;0;AA')$, $B'(-OB;0;BB')$, $C'(0;OC;CC')$.

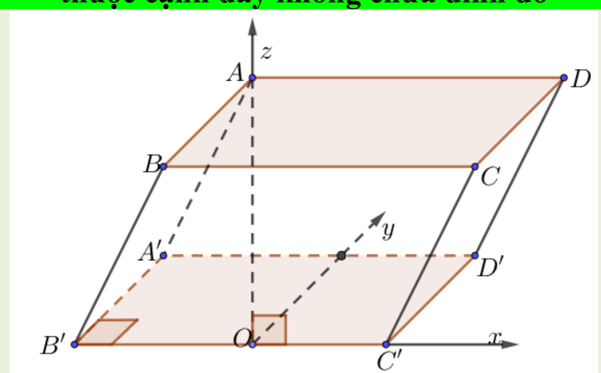
2.2.Lăng trụ nghiêng:

Lăng trụ nghiêng có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

Lăng trụ nghiêng có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D', A.
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vectơ bằng nhau: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$.